Institutionen för matematik
KTH

Tentamensskrivning, 2002-08-12, kl. 8.00–13.00.

5B1116 Matematik 2, för B, E, I, IT, M, Media och T.

För betyg 3 (godkänt), 4 och 5 krävs minst 16, 22 respektive 30 poäng inklusive bonuspoäng.

Samtliga behandlade uppgifter ska förses med utförlig lösning och motivering.

Lösningsförslag finns efter skrivningstidens slut på kurshemsidan.

Inga hjälpmedel!

1. Beräkna determinanten $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 6 & 2 \\ -4 & 8 & -5 & 5 \\ 4 & 4 & 8 & 6 \\ -3 & 0 & -6 & -2 \end{vmatrix}$. (3p)

2. Låt $f(x,y) = (2\sqrt{xy-1}, y\,e^{x-2y})$.
   a) Bestäm Jacobimatrisen för f. (1p)
   b) Visa att f har en differentierbar lokal invers kring punkten $(x,y) = (2,1)$. (1p)
   c) Bestäm den lokala inversens Jacobimatris i punkten som svarar mot $(x,y) = (2,1)$. (1p)

3. Givet vektorerna $\boldsymbol{u}_1 = (-\frac{2}{3}, a, \frac{1}{3})$, $\boldsymbol{u}_2 = (b, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$ och $\boldsymbol{u}_3 = (\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -a)$.
   a) För vilka värden på a och b bildar vektorerna en ON-bas? (2p)
   b) Bestäm den matris som transformerar en vektors koordinater (i standardbasen) till dess koordinater i denna ON-bas. (1p)

4. Bestäm alla kritiska (stationära) punkter till funktionen $f(x,y) = x^2 - x + y^2 \arctan x$ samt avgör deras karaktär. (3p)

5. Anpassa i minstakvadratmening kurvan $y = ax^2 + bx - (a+b)$ till punkterna $(-1,8)$, $(0,-2)$, $(1,1)$ och $(2,3)$. (3p)

6. Bestäm det största och minsta värde som funktionen $f(x,y) = 2x+y$ kan anta då $y \leq 4$ och $y \geq x^2$. (4p)

7. Bestäm genom att införa variablerna

$$\begin{cases} u = (x+y)e^{-z} \\ v = (x-y)e^{z} \\ w = z \end{cases}$$

den allmänna lösningen till differentialekvationen $y f'_x + x f'_y + f'_z = 0$. (4p)

V.g. vänd!

8. Ett plan innehåller punkten $P = (3, 1, 2)$ och linjen $(x, y, z) = (1, -1, 0) + t(4, 3, 2)$. Bestäm den punkt i planet som ligger närmast punkten $Q = (7, 0, 8)$. (4p)

9. Bestäm en linje (i parameterform) som går genom punkten $P = (0, 0, -1)$ och tangerar ytan $z = x^2 + y$. (4p)

10. Två linjära avbildningar i rummet har matriserna

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 8 \\ 2 & 5 & -7 \\ 2 & 1 & 10 \end{pmatrix} \qquad \text{respektive} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \\ 2 & 6 & -4 \end{pmatrix}.$$

Bestäm en nollskild vektor $\boldsymbol{v}$ så att bildvektorerna $A\boldsymbol{v}$ och $B\boldsymbol{v}$ är parallella. (4p)