Avsnitt 1

Linjära ekvationssystem

- Elementära radoperationer
- Gausseliminering
  - Exempel
  - Räkneschema
  - Exempel med exakt en lösning
  - Exempel med parameterlösning
  - Exempel utan lösning
  - Slutschema
  - Avläsa lösningen
- Satser om lösbarhet
  - Exempel
  - Några speciella system

Linjära ekvationssystem

Vi ska lära oss en metod som på ett systematiskt sätt löser alla linjära ekvationssystem.

Metoden går tillbaka så tidigt som till kinesiska matematiker under Han-dynastin (100–200 f.Kr.). I boken *Chiu Chang Suan Shu* [Nio kapitel om matematisk konst] beskrevs hur ekvationssystem med tre obekanta och tre ekvationer ställs upp i ett räkneschema och sedan stegvis löses med eliminering, nästan exakt på samma sätt som vi gör idag.

Carl Friedrich Gauss

Carl Friedrich Gauss (1777–1855) återupptäckte metoden i början av 1800-talet när han behövde lösa minstakvadratproblem inom astronomin och geodesin (läran om uppmätning av jordens yta). Detta har givit namnet *gausseliminering* åt lösningsmetoden. Länge var också eliminationsmetoden bara känd inom geodesin och det var först med Vilhelm Jordans bok *Handbuch der Vermessungskunde* (1888) som metoden hamnade i tryck och fick allmän spridning. I många sammanhang kallas därför metoden också för Gauss-Jordans eliminationsmetod.

Elementära radoperationer

När vi löser linjära ekvationssystem kommer vi använda tre typer av radoperationer:

- **Multiplicera en ekvation med en nollskild konstant**

  Vi ersätter en ekvation i systemet med samma ekvation fast multiplicerad med en konstant $\neq 0$. Exempelvis betyder

$$\begin{cases} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 5 \qquad 2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

  att den aktuella ekvationen ersätts med

$$2 \cdot 2x_1 + 2 \cdot 3x_2 - 2 \cdot 4x_3 = 2 \cdot 5.$$

- **Addera en multipel av en ekvation till en annan ekvation**

  Nästa radoperation är att vi multiplicerar en rad med en konstant och resultatet adderar vi till en annan rad.
  I exemplet

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 5 \qquad -2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 6x_1 - 7x_2 + 8x_3 = 9 \end{cases}$$

  ersätter vi den nedre raden med

$$\begin{array}{rrcrcrcl} & 6x_1 & - & 7x_2 & + & 8x_3 & = & 9 \\ - & 2 \cdot 2x_1 & + & 2 \cdot 3x_2 & - & 2 \cdot 4x_3 & = & 2 \cdot 5 \\ \hline & 2x_1 & - & 13x_2 & + & 16x_3 & = & -1 \end{array}$$

  d.v.s. resultatet blir

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 5 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 2x_1 - 13x_2 + 16x_3 = -1 \end{cases}$$

- **Byta plats på två rader**

  Den sista radoperationen är att vi helt enkelt byter plats på två ekvationer, t.ex.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 5 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 6x_1 - 7x_2 + 8x_3 = 9 \end{cases}$$

  blir

$$\begin{cases} 6x_1 - 7x_2 + 8x_3 = 9 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 5 \end{cases}$$

Gausseliminering

Ingen av de tre radoperationerna ändrar lösningsmängden till ett linjärt ekvationssystem. Det betyder att om vi utför en radoperation på ett system så kommer det nya systemet vi får efter radoperationen att ha samma lösningar som det gamla systemet.

Gausseliminering är en metod som utnyttjar detta faktum och med hjälp av radoperationer stegvis ändrar ekvationssystemet så att systemet efter varje steg blir något litet enklare och till slut så enkelt att vi direkt kan avläsa lösningen.

Exempel

Säg att vi vill lösa ekvationssystemet

$$\left\{\begin{aligned} x + {}\; 6y - 2z &= 27,\\ 2y + 2z &= 8,\\ -2x - 13y + 4z &= -57.\end{aligned}\right.$$

I korthet kan man beskriva gausseliminering som att vi i en ekvation väljer en variabel och sedan eliminerar den variabeln från de övriga ekvationerna med hjälp av den valda ekvationen. Man upprepar sedan detta förfarande med en ny ekvation och en ny variabel, tills alla variabler frilagts eller tills antalet lediga ekvationer tagit slut.

I vårt exempel är vi systematiska och väljer den första variabeln x i den första ekvationen

$$\left\{\begin{aligned} x + {}\; 6y - 2z &= 27,\\ 2y + 2z &= 8,\\ -2x - 13y + 4z &= -57.\end{aligned}\right.$$

Strategin är nu att eliminera x-termen från den tredje ekvationen. Det gör vi genom att addera två gånger första raden till den tredje raden,

$$\left\{\begin{aligned} x + {}\; 6y - 2z &= 27, & \quad 2\\ 2y + 2z &= 8,\\ -2x - 13y + 4z &= -57.\end{aligned}\right.$$

Den tredje raden blir då

$$\begin{array}{rrrrrrrr} & -2x & - & 13y & + & 4z & = & -57\\ + & 2x & + & 12y & - & 4z & = & 54\\ \hline & & & -y & & & = & -3 \end{array}$$

Vi får alltså systemet

$$\left\{\begin{aligned} x + {}\; 6y - 2z &= 27,\\ 2y + 2z &= 8,\\ -y \phantom{{}+2z} &= -3.\end{aligned}\right.$$

Sedan går vi vidare till nästa ekvation och nästa variabel y,

$$\left\{\begin{aligned} x + {}\; 6y - 2z &= 27,\\ 2y + 2z &= 8,\\ -y \phantom{{}+2z} &= -3.\end{aligned}\right.$$

För att få y helt fri multiplicerar vi raden med $\frac{1}{2}$,

$$\left\{\begin{aligned} x + {}\; 6y - 2z &= 27,\\ 2y + 2z &= 8, & \quad \tfrac{1}{2}\\ -y \phantom{{}+2z} &= -3,\end{aligned}\right. \qquad \sim$$

$$\begin{cases} x + 6y - 2z = 27, \\ y + z = 4, \\ -y = -3. \end{cases}$$

Vi adderar nu lämpliga multiplar av den andra raden (ekvationen) till ekvation 1 och 3 för att eliminera y från dessa ekvationer,

$$\begin{cases} x + 6y - 2z = 27, \\ y + z = 4, \\ -y = -3, \end{cases} \quad \sim \quad \begin{cases} x - 8z = 3, \\ y + z = 4, \\ z = 1, \end{cases} \quad \sim$$

Nu eliminerar vi den sista variabeln z från ekvationer 1 och 2 genom att använda ekvation 3.

$$\begin{cases} x - 8z = 3, \\ y + z = 4, \\ z = 1, \end{cases} \quad \sim \quad \begin{cases} x = 11, \\ y = 3, \\ z = 1. \end{cases}$$

Nu är det bara att avläsa lösningen.

Räkneschema

Innan vi går vidare och fördjupar oss i gausselimineringen ska vi introducera ett kompakt räkneschema som reducerar skrivarbetet när vi löser ekvationssystem.

I ett ekvationssystem, t.ex.

$$\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 = 3, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 11x_1 + 6x_3 = 8, \end{cases}$$

rensar vi bort all överflödig information och lyfter över koefficienterna framför variablerna och högerledet i en matris,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -4 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 11 & 0 & 6 & 8 \end{array}\right)$$

Övning 1

Utför radoperationerna

$$\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 5 \end{array} \quad \sim \quad \begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 3 & 4 \\ & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{array} \quad \sim \quad \begin{array}{ccc|c} & & & \\ & & & \end{array}$$

Exempel med exakt en lösning

Lös ekvationssystemet

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 9, \\ 2x + 3y + 9z &= 5, \\ 3x + 9y + 5z &= 6. \end{aligned}$$

Vi skriver först ekvationssystemet i ett räkneschema,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 2 & 3 & 9 & 5 \\ 3 & 9 & 5 & 6 \end{array}\right).$$

Gausselimineringen börjar med att vi väljer den första variabeln x i den första ekvationen,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 2 & 3 & 9 & 5 \\ 3 & 9 & 5 & 6 \end{array}\right)$$

och eliminera x från de övriga ekvationerna, d.v.s. vi utför radoperationer så att vi får nollor under den valda 1:an,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 2 & 3 & 9 & 5 \\ 3 & 9 & 5 & 6 \end{array}\right) \begin{matrix} -2 & -3 \\ & \\ & \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -1 & 3 & -13 \\ 0 & 3 & -4 & -21 \end{array}\right).$$

Nu flyttar vi fokus till den andra ekvationen (rad 2) och variabeln y (kolumn 2). För att få y helt fri multiplicerar vi raden med -1,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -1 & 3 & -13 \\ 0 & 3 & -4 & -21 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ - \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & -3 & 13 \\ 0 & 3 & -4 & -21 \end{array}\right).$$

Vi elimerar sedan y från första och tredje ekvationen,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & -3 & 13 \\ 0 & 3 & -4 & -21 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ -3 & -2 \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 9 & -17 \\ 0 & 1 & -3 & 13 \\ 0 & 0 & 5 & -60 \end{array}\right).$$

Vi fortsätter till den tredje raden och z. Variabeln får vi fri genom att multiplicera raden med $\frac{1}{5}$,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 9 & -17 \\ 0 & 1 & -3 & 13 \\ 0 & 0 & 5 & -60 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ \frac{1}{5} \end{matrix} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 9 & -17 \\ 0 & 1 & -3 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & -12 \end{array}\right),$$

och sedan eliminerar vi z från rad 1 och 2,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 9 & -17 \\ 0 & 1 & -3 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & -12 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ 3 \quad -9 \end{array} \sim$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 91 \\ 0 & 1 & 0 & -23 \\ 0 & 0 & 1 & -12 \end{array}\right).$$

Detta är slutschemat och från den kan vi avläsa lösningen,

$$x = 91, \quad y = -23 \quad \text{och} \quad z = -12.$$

Exempel med parameterlösning

Lös ekvationssystemet

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + x_3 &= 3, \\ 6x_1 - 2x_2 + 5x_3 &= 0, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 &= 9. \end{aligned}$$

Vi för över koefficienterna i ett räkneschema,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 3 \\ 6 & -2 & 5 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 9 \end{array}\right).$$

Som alltid börjar vi med den första variabeln x_1 i den första ekvationen. Vi multiplicerar raden med $\frac{1}{3}$ för att få x_1 fri och eliminerar sedan x_1 från de andra ekvationerna,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 3 \\ 6 & -2 & 5 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 9 \end{array}\right) \begin{array}{l} \frac{1}{3} \\ \\ \\ \end{array} \sim$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ 6 & -2 & 5 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 9 \end{array}\right) \begin{array}{l} -6 \quad -3 \\ \\ \\ \end{array} \sim$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \end{array}\right).$$

Tanken är nu att vi ska fortsätta och eliminera x_2 från alla rader utom den andra, men nu har vi fått nollor i den andra kolumnen (där x_2 står) både i den andra och tredje raden, så vi måste istället gå vidare till x_3 och eliminerar x_3 från alla rader utom den andra,

$$\begin{aligned}
&\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \frac{1}{3} \\ \\ \end{array} &\sim \\
&\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ 3 \quad -\frac{1}{3} \\ \\ \end{array} &\sim \\
&\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).
\end{aligned}$$

Nu har vi nått slutschemat (inga fler variabler att frilägga) och för att enklare se lösningen översätter vi tillbaka till ekvationsformen,

$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{3}x_2 \quad = \frac{5}{3}, \\ \qquad\qquad x_3 = -2, \\ \qquad\qquad\; 0 = 0. \end{cases}$$

Här ser vi att den tredje raden är överflödig eftersom $0 = 0$ är alltid sant (oberoende av värdena på x_1, x_2 och x_3) så vi kan stryka den raden utan att ändra systemets lösningsmängd,

$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{3}x_2 \quad = \frac{5}{3}, \\ \qquad\qquad x_3 = -2. \end{cases}$$

Vidare ger den andra raden ett värde på x_3.

I den första raden ser vi att de kvarvarande variablerna x_1 och x_2 hänger ihop enligt sambandet

$$x_1 - \tfrac{1}{3}x_2 = \tfrac{5}{3}.$$

Denna ekvation ger oss oändligt många sätt att välja x_1 och x_2 på. Vi kan t.ex. välja x_2 fritt och för varje värde på x_2 få ett värde på x_1,

$$x_1 = \tfrac{5}{3} + \tfrac{1}{3}x_2.$$

Med andra ord kan vi låta x_2 få fungera som en parameter och uttrycka x_1 i termer av den parametern. Man brukar i dessa fall införa en speciell bokstav för parametern och skriva lösningen som

$$\begin{cases} x_1 = \frac{5}{3} + \frac{1}{3}t, \\ x_2 = t, & \qquad (t \text{ parameter}). \\ x_3 = -2, \end{cases}$$

Detta är alla lösningar till ekvationssystemet.

Exempel utan lösning

Lös ekvationssystemet

$$
\begin{cases}
x + 4y + 3z + 7u = 5,\\
2x + 8y + 2z - u = 3,\\
3x + 13y + 7z + 21u = 18,\\
8x + 33y + 6z - 4u = 16.
\end{cases}
$$

Vi börjar gausseliminera,

$$
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 4 & 3 & 7 & 5\\
2 & 8 & 2 & -1 & 3\\
3 & 13 & 7 & 21 & 18\\
8 & 33 & 6 & -4 & 16
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
-2\quad -3\quad -8\\ \\ \\ \\
\end{array}
\sim
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 4 & 3 & 7 & 5\\
0 & 0 & -4 & -15 & -7\\
0 & 1 & -2 & 0 & 3\\
0 & 1 & -18 & -60 & -24
\end{array}\right).
$$

Eftersom vi har en nolla i y-kolumnen i den andra raden byter vi plats på rad 2 och 3, och fortsätter elimineringen.

$$
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 4 & 3 & 7 & 5\\
0 & 0 & -4 & -15 & -7\\
0 & 1 & -2 & 0 & 3\\
0 & 1 & -18 & -60 & -24
\end{array}\right)
\sim
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 4 & 3 & 7 & 5\\
0 & 1 & -2 & 0 & 3\\
0 & 0 & -4 & -15 & -7\\
0 & 1 & -18 & -60 & -24
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\\ -\quad -4\\ \\ \\
\end{array}
\sim
$$

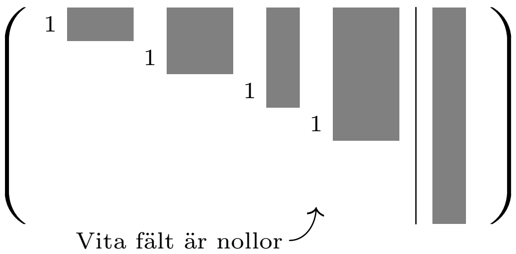
$$
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & 11 & 7 & -7\\
0 & 1 & -2 & 0 & 3\\
0 & 0 & -4 & -15 & -7\\
0 & 0 & -16 & -60 & -27
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\\ \\ -\frac{1}{4}\\ \\
\end{array}
\sim
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & 11 & 7 & -7\\
0 & 1 & -2 & 0 & 3\\
0 & 0 & 1 & \frac{15}{4} & \frac{7}{4}\\
0 & 0 & -16 & -60 & -27
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\\ \\ 16\quad 2\quad -11\\ \\
\end{array}
\sim
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & 0 & -\frac{137}{4} & -\frac{105}{4}\\
0 & 1 & 0 & \frac{15}{2} & \frac{13}{2}\\
0 & 0 & 1 & \frac{15}{4} & \frac{7}{4}\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right).
$$

Här ser vi att i slutschemats sista rad står det $0 = 1$ och detta samband kan aldrig vara uppfyllt oavsett vad x, y, z och u har för värden. Bland ursprungsekvationerna fanns alltså en inbyggd motsägelse som framkom tydligt först efter att vi gausseliminerat systemet.

Ekvationssystemet saknar alltså lösning.

Slutschema

När vi gausseliminerat klart når vi ett slutschema. Ett slutschema har alltid följande utseende



Alla rader i ett slutschema (förutom eventuella nollrader längst ner) har en trappstegsetta, d.v.s. en etta som bara har nollor ovanför, under och till vänster om sig, och som ligger till höger om trappstegsettan på raden ovanför.

Övning 2

Ringa in alla trappstegsettor och avgör om räkneschemat är ett slutschema.

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

Avläsa lösningen

Från ett slutschema kan vi alltid avläsa lösningen med följande metod

1. Kontrollera nollrader.
   - Om en nollrad är av typen $0 = 0$ kan raden strykas,
   - Om en nollrad är av typen $0 = a$ där $a \neq 0$ så saknar ekvationssystemet lösning.
2. Markera de kolumner som inte har en trappstegsetta. Variablerna som svarar mot markerade kolumner väljs som parametrar i lösningen, medan de variabler som svarar mot trappstegsettor uttrycks i parametrarna.

Exempel

Antag att vi nått slutschemat

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

och ska avläsa lösningen.

Vi börjar med att stryka de två sista raderna eftersom de är av typen $0 = 0$,

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & 0 \end{array}\right).$$

Sedan markerar vi de kolumner (d.v.s. variabler) som inte har en trappstegsetta,

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & 0 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccccccc} & * & & * & * & \end{array} \end{array}$$

Det är dessa variabler som vi ska välja som parametrar. Om vi skriver systemet i ekvationsform

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & & & & & + & 2x_5 & = & 3, \\ & & & & x_3 & - & 3x_4 & + & 4x_5 & = & 0, \\ & & * & & & & * & & * & & \end{array}$$

så ska x_2, x_4 och x_5 flyttas över i högerledet och fungera som parametrar

$$\begin{aligned} x_1 &= 3 - x_2 - 2x_5, \\ x_3 &= 3x_4 - 4x_5. \end{aligned}$$

När vi skriver lösningen så använder vi parameternamnen s, t och u för att tydligt markera att vi har en parameterlösning,

$$\begin{cases} x_1 = 3 - s - 2u, \\ x_2 = s, \\ x_3 = 3t - 4u, & (s,\ t,\ u \text{ parametrar}). \\ x_4 = t, \\ x_5 = u, \end{cases}$$

Övning 2

Avläs lösningen till

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{cases} x_1 = \\ x_2 = \\ x_3 = \\ x_4 = \\ x_5 = \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{cases} x_1 = \\ x_2 = \\ x_3 = \\ x_4 = \\ x_5 = \end{cases}$$

Satser om lösbarhet

Ett linjärt ekvationssystems lösning bestäms av slutschemats utseende. Om vi sammanfattar så gäller följande:

- Systemet saknar lösning om en nollrad i slutschemat har ett nollskilt högerled,

och om detta fall inte inträffar så har vi två möjligheter:

- Systemet har exakt en lösning om varje kolumn i slutschemat har en trappstegsetta.

- Systemet har en parameterlösning om någon kolumn i slutschemat saknar trappstegsetta.

Detta ger oss direkt följande sats om lösningsmängden.

Sats Antalet lösningar till ett linjärt system är antingen

- exakt en,
- oändligt många (parameterlösning), eller
- inga alls.

Exempel

Lös systemet

$$\begin{cases} x + y + z = 3, \\ x + 2y + az = 2, \\ 2x + y + 3z = b + 7, \end{cases}$$

för alla reella tal a och b.

Talen a och b betraktar vi som konstanter i ekvationssystemet. Vi gör som vanligt och gausseliminerar tills vi når slutschemat,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & a & 2 \\ 2 & 1 & 3 & b+7 \end{array}\right) \begin{array}{c} \ominus \; \text{-2} \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & a-1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & b+1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \oplus \; \ominus \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2-a & 4 \\ 0 & 1 & a-1 & -1 \\ 0 & 0 & a & b \end{array}\right).$$

Nästa steg är att multiplicera den tredje raden med $1/a$ för att få en etta där, men här måste vi se upp. Om $a = 0$ går inte detta ($1/0$ är odefinierat) så vi måste dela upp den fortsatta lösningen i två fall $a = 0$ eller $a \neq 0$.

$a = 0$: Om $a = 0$ får vi räkneschemat

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{array}\right)$$

och detta är faktiskt ett slutschema. Längst ner har vi en nollrad och för att vi ska ha några lösningar krävs att högerledet är noll, d.v.s. $b = 0$. Om så är fallet,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
$$\begin{array}{ccc} & & * \end{array}$$

så har vi en kolumn utan trappstegsetta, d.v.s. en parameterlösning

$$\begin{cases} x = 4 - 2t, \\ y = -1 + t, \qquad (t \text{ parameter}). \\ z = t, \end{cases}$$

$a \neq 0$: Nu kan vi multiplicera den tredje raden med $1/a$,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2-a & 4 \\ 0 & 1 & a-1 & -1 \\ 0 & 0 & a & b \end{array}\right) \; \frac{1}{a}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2-a & 4 \\ 0 & 1 & a-1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & b/a \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4+(a-2)b/a \\ 0 & 1 & 0 & -1-(a-1)b/a \\ 0 & 0 & 1 & b/a \end{array}\right)$$

I slutschemat har vi en trappstegsetta i varje kolumn, d.v.s. systemet har exakt en lösning, och i högerledet kan vi avläsa lösningen

$$\begin{cases} x = 4 + (a-2)b/a, \\ y = -1 - (a-1)b/a, \\ z = b/a. \end{cases}$$

Svaret blir alltså

Om $\quad a = b = 0$: $\quad \begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = -1 + t \qquad (t \text{ parameter}) \\ z = t \end{cases}$

$a = 0,\ b \neq 0$: Systemet saknar lösning.

$a \neq 0$: $\quad \begin{cases} x = 4 + (a-2)b/a \\ y = -1 - (a-1)b/a \\ z = b/a \end{cases}$

Övning 3

För vilka a får vi utföra följande radoperationer?

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 0 & 7 \\ -1 & 5 & 3 & 6 \\ 0 & 5 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \frac{a}{a-1} \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 0 & 7 \\ -1 & 5 & 3 & 6 \\ 0 & 5 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \frac{a}{a-1} \\ \downarrow \\ \hookleftarrow \end{array}$$

Några speciella system

Bara genom att betrakta ett ekvationssystems form kan vi ibland dra slutsatser om systemets lösningsmängd.

Liggande system

Ett system där vi har fler obekanta än ekvationer kallas för ett liggande system eftersom dess räkneschema är avlångt och brett

Eftersom antal kolumner är fler än antalet rader och vi kan högst ha en trappstegsetta per rad måste åtminstone en kolumn sakna en trappstegsetta. Ett liggande system kan alltså antingen ha

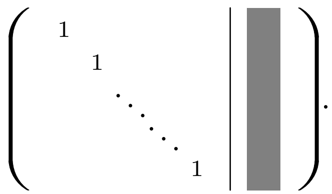
- en parameterlösning, eller
- sakna lösning.

Kvadratiska system

I ett kvadratiskt system har vi lika många obekanta som ekvationer. Räkneschemats vänsterled är alltså en kvadrat

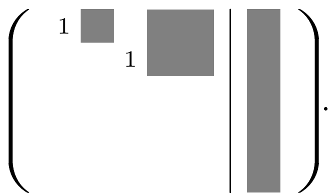
De möjliga slutscheman är

- En trappstegsetta i varje kolumn och rad,

  Då har vi exakt en lösning.

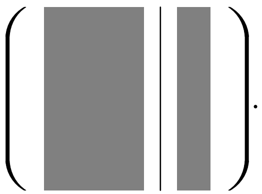
- Någon kolumn saknar trappstegsetta. Vi har då lika många nollrader som kolumner utan trappstegsetta.

  Systemet har då antingen en parameterlösning eller så saknas lösning.

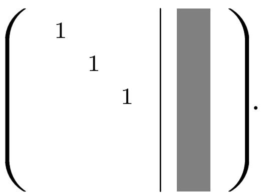
Stående system

När systemet har fler ekvationer än obekanta har vi ett stående system. Räkneschemat är då högt och smalt



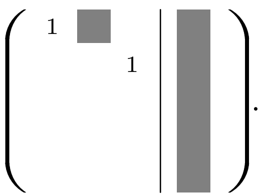
De möjliga slutscheman är

- En trappstegsetta i varje kolumn och nollrader på slutet.



  Vi har så antingen exakt en lösning eller ingen lösning.

- Någon kolumn utan trappstegsetta och nollrader på slutet.



  Antingen finns det då en parameterlösning eller så saknas lösning.

Homogena system

Med ett homogent system menas ett system där högerledet endast består av nollor.

Detta gör att slutschemat inte kan ha rader av typen $0 = a$ där $a \neq 0$. Homogena system har antingen exakt en lösning (den triviala lösningen $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$) eller parameterlösning.

Exempel 1.17d

Är det sant att om ett kvadratiskt homogent system bara har den triviala lösningen, så har systemet med samma vänsterled men med allmänt högerled en och endast en lösning?

Eftersom det homogena systemet har exakt en lösning (den triviala lösningen $x_1 = \cdots = x_n = 0$) så har den slutschemat

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & & & & & 0 \\ & 1 & & & & 0 \\ & & 1 & & & 0 \\ & & & 1 & & 0 \\ & & & & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Samma system fast med ett annat högerled kommer ha samma form på slutschemat vänstra del eftersom eliminationen inte påverkas av högerledet

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \end{array}\right),$$

d.v.s. med ett allmänt högerled har vi också exakt en lösning.

Avsnitt 1. Linjära ekvationssystem

L1.6 Skriv följande system i matrisform

a) $\left\{\begin{array}{l} x_1 + 3x_2 = 5, \\ 3x_2 + \ \ x_1 = 6, \end{array}\right.$

b) $\left\{\begin{array}{l} 6x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = \ \ \ 7, \\ 5x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -8. \end{array}\right.$

a) Vi börjar med att kasta om termerna i den andra ekvationen så att ekvationen blir skriven i rätt ordning

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 + 3x_2 = 5, \\ x_1 + 3x_2 = 6. \end{array}\right.$$

När vi skriver ekvationssystemet i matrisform skalar vi bort all "onödig" information och behåller bara det väsentliga. Det vi tar bort är variabelnamnen och flyttar över koefficienterna till matrisen. Varje kolumn i matrisen svarar mot en variabel

$$\begin{array}{l} \boxed{1} \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 = 5 \\ \boxed{1} \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 = 6 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & & \\ \boxed{1} & & \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} 1 \cdot x_1 + \boxed{3} \cdot x_2 = 5 \\ 1 \cdot x_1 + \boxed{3} \cdot x_2 = 6 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \boxed{3} & \\ 1 & \boxed{3} & \end{array}\right)$$

Sedan drar vi ett streck och skriver högerledet,

$$\begin{array}{l} 1 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 = \boxed{5} \\ 1 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 = \boxed{6} \end{array} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & \boxed{5} \\ 1 & 3 & \boxed{6} \end{array}\right)$$

Matrisen innehåller nu exakt den information som finns i ekvationssystemet.

b) Precis som i a-uppgiften behåller vi bara koefficienterna och högerledet,

$$\begin{array}{l} \boxed{6} \cdot x_1 + \boxed{3} \cdot x_2 + \boxed{-1} \cdot x_3 + \boxed{1} \cdot x_4 = \boxed{7} \\ \boxed{5} \cdot x_1 + \boxed{-2} \cdot x_2 + \boxed{1} \cdot x_3 + \boxed{-1} \cdot x_4 = \boxed{-8} \end{array}$$

och skriver dem i en matris

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 6 & 3 & -1 & 1 & 7 \\ 5 & -2 & 1 & -1 & -8 \end{array}\right).$$

L1.8 Hur många lösningar har systemen

a) $\left(\begin{array}{ccc|r} 1 & 4 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$,

b) $\left(\begin{array}{ccc|r} 1 & 4 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right)$?

a) Det kan vara svårt, utan vana, att se hur ekvationssystemet ser ut, så låt oss skriva det i den vanliga formen

$$\begin{array}{rrr} x_1 + 4x_2 & & = 20, \\ & x_2 + 2x_3 & = \ \ 4, \\ & x_3 & = \ \ 1. \end{array}$$

Nu ser vi direkt att $x_3 = 1$, och stoppar vi in detta i den andra ekvationen kan vi lösa ut x_2. Med ett värde på x_2 kan vi sedan från den första ekvationen lösa ut x_1. Genom att resonera baklänges på detta sätt ser vi att systemet har exakt en lösning (ett värde på x_3 ger exakt ett värde på x_2, och ett värde på x_2 ger exakt ett värde på x_1).

b) Betraktar vi systemet så ser vi att den andra och tredje raden är lika. Det betyder att båda raderna svarar mot en och samma ekvation. Vi kan alltså stryka den tredje raden utan att det påverkar ekvationssystemets lösningsmängd,

$$\left(\begin{array}{ccc|r} 1 & 4 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right).$$

Från den andra ekvationen kan vi lösa ut x_2 i termer av x_3

$$x_2 = 4 - 2x_3.$$

Stoppar vi sedan in uttrycket för x_2 i den första ekvationen får vi x_1 uttryckt i termer av x_3. Vi kan alltså välja x_3 fritt och för varje värde på x_3 få ett värde på x_1 och x_2. Variabeln x_3 fungerar därmed som en parameter och parametriserar alla lösningar. Systemet har oändligt många lösningar.

L1.11a Bestäm trappstegformen av systemet

$$\begin{cases} 2u + 5v + 7w = 4, \\ 7u \qquad\quad - 2w = 4, \\ \ u + \ v + \ w = 0, \end{cases}$$

och lös systemet.

Vi skriver först systemet i matrisform

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 7 & 4 \\ 7 & 0 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Det första steget i gausselimineringen är att se till att vi får en 1:a i det övre vänstra hörnet. Vi kan göra det på flera sätt, t.ex. genom att multiplicera första raden med $\frac{1}{2}$, eller byta plats på den första och tredje raden. Låt oss välja det senare alternativet (utan speciell anledning),

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 7 & 4 \\ 7 & 0 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & -2 & 4 \\ 2 & 5 & 7 & 4 \end{array}\right).$$

Nästa steg är att se till att vi får nollor under vår 1:a. Det gör vi enklast genom att addera multiplar av den första raden till rad 2 och 3.

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & -2 & 4 \\ 2 & 5 & 7 & 4 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} -7 \quad -2 \\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -9 & 4 \\ 0 & 3 & 5 & 4 \end{array}\right).$$

Nu är den första kolumnen avklarad och vi går vidare till kolumn 2. Målet här är att få en 1:a i det andra diagonalelementet

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -9 & 4 \\ 0 & 3 & 5 & 4 \end{array}\right)$$

Ett sätt att åstadkomma detta är att multiplicera rad 2 med faktorn $-\frac{1}{7}$. Annars kan man även tänka sig att addera 2 gånger den tredje raden till den andra raden och sedan multiplicera den andra raden med -1. Det finns som sagt flera sätt att nå målet (däremot är 8 gånger första raden adderad till den andra raden förbjuden eftersom vi då förstör 0:an i första kolumnen).

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -9 & 4 \\ 0 & 3 & 5 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -\frac{1}{7} \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{9}{7} & -\frac{4}{7} \\ 0 & 3 & 5 & 4 \end{array}\right)$$

Vi utför nu radoperationer så att övriga element i samma kolumn blir noll,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{9}{7} & -\frac{4}{7} \\ 0 & 3 & 5 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -3 \quad - \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{2}{7} & \frac{4}{7} \\ 0 & 1 & \frac{9}{7} & -\frac{4}{7} \\ 0 & 0 & \frac{8}{7} & \frac{40}{7} \end{array}\right).$$

När den andra kolumnen är avklarad övergår vi till den tredje kolumnen och dess diagonalelement. För att få en 1:a där multiplicerar vi rad 3 med faktorn $\frac{7}{8}$,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{2}{7} & \frac{4}{7} \\ 0 & 1 & \frac{9}{7} & -\frac{4}{7} \\ 0 & 0 & \frac{8}{7} & \frac{40}{7} \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \frac{7}{8} \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{2}{7} & \frac{4}{7} \\ 0 & 1 & \frac{9}{7} & -\frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right),$$

och vi radreducerar uppåt för att få nollor ovanför 1:an,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{2}{7} & \frac{4}{7} \\ 0 & 1 & \frac{9}{7} & -\frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \quad \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right).$$

Nu har vi skrivit systemet i trappstegsform. För att kunna avläsa ekvationssystemets lösning översätter från matrisformen tillbaka till det vanliga skrivsättet,

$$\begin{aligned} 1\cdot u + 0\cdot v + 0\cdot w &= 2, \\ 0\cdot u + 1\cdot v + 0\cdot w &= -7, \\ 0\cdot u + 0\cdot v + 1\cdot w &= 5, \end{aligned}$$

eller ännu enklare

$$\begin{aligned} u \qquad\qquad &= 2, \\ v \qquad &= -7, \\ w &= 5. \end{aligned}$$

Efter lite övning är det som regel inga problem att direkt från matrisens trappstegsform avläsa lösningen.

Innan vi överger uppgiften återstår en sak, kontroll! Gausselimination består av många små enkla räkningar och gör vi ett litet räknefel någonstans så blir resten av uträkningarna fel eftersom varje steg bygger på resultaten av tidigare steg. Felet kommer alltså att fortplanta sig, så det gäller verkligen att vara noggrann. Men vi kan kontrollera vårt svar genom att stoppa in lösningen i ursprungsekvationerna

$$\begin{aligned} 2u + 5v + 7w &= 2\cdot 2 + 5\cdot(-7) + 7\cdot 5 = 4, \\ 7u \qquad - 2w &= 7\cdot 2 - 2\cdot 5 = 4, \\ u + v + w &= 2 - 7 + 5 = 0. \end{aligned}$$

L1.11b Bestäm trappstegsformen av systemet

$$\begin{cases} 2u + 5v + 7w = 4, \\ 3u \qquad - 2w = 4, \\ u + v + w = 0, \end{cases}$$

och lös systemet.

Som alltid skriver vi först systemet i matrisform

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 7 & 4 \\ 3 & 0 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Sedan följer radoperationer som stegvis överför matrisen till trappstegform. Eftersom gausselimineringen hela tiden följer en given arbetsgång behöver vi inte motivera varje radoperation utan kan nöja oss med att bara redovisa uträkningarna.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 7 & 4 \\ 3 & 0 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 4 \\ 2 & 5 & 7 & 4 \end{array}\right) \quad \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & 4 \\ 0 & 3 & 5 & 4 \end{array}\right)$$

I det här räkneschemat noterar vi att andra och tredje raden är lika sånär som på tecken i den vänstra delen. Adderar vi andra raden till den tredje raden så kommer vi alltså få en nollrad som tredje rad,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & 4 \\ 0 & 3 & 5 & 4 \end{array}\right) \quad \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{array}\right).$$

Om vi tolkar den tredje raden så står det

$$0 \cdot u + 0 \cdot v + 0 \cdot w = 8,$$

d.v.s. $0 = 8$, vilket är orimligt. Det betyder att systemet saknar lösning.

Notera att vi började med att följa gausselimineringsmetoden till punkt och pricka men att vi mitt i uträkningarna observerade orimligheten i andra och tredje raden.

Det går givetvis bra att utföra gausselimineringen till vägs ände (trappstegsformen) och där se att vi inte har en lösning.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 7 & 4 \\ 3 & 0 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 4 \\ 2 & 5 & 7 & 4 \end{array}\right) \; -3 \;\; -2 \qquad \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & 4 \\ 0 & 3 & 5 & 4 \end{array}\right) \; -\tfrac{1}{3} \qquad \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 3 & 5 & 4 \end{array}\right) \; -3 \;\; - \qquad \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{array}\right)$$

Nu ser vi från den tredje raden att systemet saknar lösning.

Anm. Det finns inget enkelt sätt att kontrollera svaret (ingen lösning att stoppa in i ursprungsekvationerna).

L1.11c Bestäm trappstegsformen av systemet

$$\begin{cases} 2x + 5y + 7z = -4, \\ 3x \qquad\;\; - 2z = \;\;\, 4, \\ \;\; x + \;\; y + \;\; z = \;\;\, 0, \end{cases}$$

och lös systemet.

Vi sätter igång och gausseliminerar,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 7 & -4 \\ 3 & 0 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \; \tfrac{1}{2} \qquad \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} & -2 \\ 3 & 0 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \; -3 \;\; - \qquad \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} & -2 \\ 0 & -\frac{15}{2} & -\frac{25}{2} & 10 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & 2 \end{array}\right) \; -\tfrac{2}{15} \qquad \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} & -2 \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & 2 \end{array}\right) \; \tfrac{3}{2} \;\; -\tfrac{5}{2} \qquad \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Nu har vi nått sluttablån och det visade sig att den sista raden blev $0 = 0$. Detta är uppenbarligen sant (till skillnad från t.ex. $0 = 8$) och vi kan därför stryka den tredje raden utan att vi förändrar systemets lösningsmängd. De andra två raderna svarar mot ekvationerna

$$\begin{cases} x \qquad - \frac{2}{3}z = \;\;\, \frac{4}{3}, \\ \qquad y + \frac{5}{3}z = -\frac{4}{3}. \end{cases}$$

Här ser vi att vi kan välja z fritt och för varje värde på z få värden på x och y,

$$\begin{cases} x = \;\;\, \frac{4}{3} + \frac{2}{3}z, \\ y = -\frac{4}{3} - \frac{5}{3}z. \end{cases}$$

Variabeln z fungerar alltså som en parameter och bestämmer alla lösningar. För att skriva detta tydligare inför man en speciell bokstav t för variabeln som är parameter och skriver

$$\begin{cases} x = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}t, \\ y = -\frac{4}{3} - \frac{5}{3}t, \qquad (t \text{ parameter}). \\ z = t, \end{cases}$$

För varje värde på t har vi en lösning. När vi kontrollerar svaret stoppar vi därför in uttryckena för x, y och z (med allmänt t) och ser om ekvationerna är uppfyllda,

$$\begin{aligned} 2x + 5y + 7z &= 2 \cdot \left(\tfrac{4}{3} + \tfrac{2}{3}t\right) + 5 \cdot \left(-\tfrac{4}{3} - \tfrac{5}{3}t\right) + 7 \cdot t \\ &= \tfrac{8}{3} - \tfrac{20}{3} + \tfrac{4}{3}t - \tfrac{25}{3}t + 7t = -4 + 0\,t = -4, \\ 3x - 2z &= 3 \cdot \left(\tfrac{4}{3} + \tfrac{2}{3}t\right) - 2 \cdot t = 4 + 2t - 2t = 4, \\ x + y + z &= \tfrac{4}{3} + \tfrac{2}{3}t + \left(-\tfrac{4}{3} - \tfrac{5}{3}t\right) + t \\ &= \tfrac{4}{3} - \tfrac{4}{3} + \tfrac{2}{3}t - \tfrac{5}{3}t + t = 0. \end{aligned}$$

L1.12a Bestäm trappstegsformen av systemet

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ \phantom{x_1 - {}} x_2 - x_3 + x_4 = 6, \\ x_1 + + x_3 - x_4 = 3, \\ \phantom{x_1 - {}} x_2 \phantom{{} - x_3} + x_4 = 3, \end{cases}$$

och lös systemet.

Vi gausseliminerar,

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right) \sim$$

(Detta betyder att vi först adderar rad 4 till rad 3 och därefter multiplicerar rad 4 med $\frac{1}{3}$.)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Från sluttablån avläser vi lösningen

$$x_1 = 7, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = -3, \quad \text{och} \quad x_4 = 1.$$

Som alltid avslutar vi med att kontrollera svaret,

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 7 - 2 - 3 + 1 = 3, \\ x_2 - x_3 + x_4 &= 2 - (-3) + 1 = 6, \\ x_1 + x_3 - x_4 &= 7 - 3 - 1 = 3, \\ x_2 + x_4 &= 2 + 1 = 3. \end{aligned}$$

L1.13b Bestäm trappstegsformen av systemet

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 \phantom{{}+4x_4} = 5, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 4, \end{cases}$$

och lös systemet.

Eftersom vi har tre ekvationer och fyra variabler får vi en avlång matris,

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 1 & 4 \end{array}\right).$$

Innan vi börjar gausseliminera kan vi notera (efter att ha läst avsnitt 1.4 i kursboken) att vårt system (ett liggande system) kommer antingen sakna lösning eller ha oändligt många lösningar (d.v.s. parameterlösning). Nu sätter vi igång och gausseliminerar

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 1 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{c} - \quad - \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & -4 & -4 & 4 & -4 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -\frac{1}{4} \\ - \end{array} \sim$$

(Vi multiplicerar alltså rad 2 med $-\frac{1}{4}$ och rad 3 med -1. Eftersom radoperationerna berör olika rader kan vi utföra dem i valfri ordning.)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ - \quad -3 \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Den sista nollraden $(0 = 0)$ kan vi stryka utan att ändra lösningsmängden. Rad 1 och 2 svarar mot ekvationerna

$$\begin{aligned} x_1 \phantom{{}+x_2} + 2x_3 + 3x_4 &= 2, \\ x_2 + x_3 - x_4 &= 1. \end{aligned}$$

I detta system ser vi att om x_3 och x_4 tillordnats värden så kan vi lösa ut x_1 och x_2 i termer av x_3, x_4,

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 - 2x_3 - 3x_4, \\ x_2 &= 1 - x_3 + x_4. \end{aligned}$$

Variablerna x_3 och x_4 fungerar alltså som parametrar (oberoende av varandra) och lösningen kan skrivas som

$$\begin{cases} x_1 = 2 - 2s - 3t, \\ x_2 = 1 - s + t, \\ x_3 = s, \\ x_4 = t, \end{cases} \qquad (s,\, t \text{ parameterar}).$$

Vi kontrollerar slutligen svaret,

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 2 - 2s - 3t + 3(1 - s + t) + 5s \\ &= 2 + 3 - 2s - 3s + 5s - 3t + 3t = 5, \\ x_2 - x_2 + x_3 + 4x_4 &= 2 - 2s - 3t - (1 - s + t) + s + 4t \\ &= 2 - 1 - 2s + s + s - 3t - t + 4t = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 &= 2 - 2s - 3t + 2(1 - s + t) + 4s + t \\ &= 2 + 2 - 2s - 2s + 4s - 3t + 2t + t = 4. \end{aligned}$$

L1.13c Bestäm trappstegsformen av systemet

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 \phantom{{}+4x_4} = 5, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 4, \end{cases}$$

och lös systemet.

Precis som i uppgift 1.13b har vi ett avlångt system (liggande system) och då kommer systemet antingen sakna lösning eller ha oändligt många lösningar (parameterlösning).

Vi gausseliminerar,

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 1 & 4 \end{array}\right) \begin{matrix} - \;\; - \\ \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & -4 & -4 & 4 & -5 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ -\frac{1}{4} \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & -4 & -4 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{array}\right) \sim$$

Redan efter den andra tablån såg vi att rad 2 och 3 såg misstänkta ut (vänsterleden lika sånär som på en multiplikativ faktor men högerleden inte lika med samma faktor) så vi frångick den normala arbetsgången. I den tredje raden har vi nu $0 = \frac{1}{4}$ vilket visar att systemet saknar lösning.

Vi skulle även bestämma systemets trappstegsform så vi får lydigt gausseliminera vidare,

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & -4 & -4 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{array}\right) \begin{matrix} \\ -\frac{1}{4} \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{array}\right) \begin{matrix} \\ -3 \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 & \frac{5}{4} \\ 0 & 1 & 1 & -1 & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{array}\right).$$

L1.14b Bestäm trappstegsformen av systemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 \phantom{{}+x_2} + 2x_3 = 2, \\ 5x_1 + x_2 + 4x_3 = 6, \\ \phantom{5x_1 +{}} 4x_2 + x_3 = 4, \end{cases}$$

och lös systemet.

Från formen av systemet (ett stående system) kan vi inte dra någon slutsats om systemets lösning. Visserligen saknar stående system i allmänhet lösning, men det säger oss bara att de flesta stående system saknar lösning och säger inget om vårt speciella system. Systemet kan alltså antingen sakna lösning, ha exakt en lösning eller ha oändligt många lösningar (parameterlösning).

Vi löser systemet med gausseliminering,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \end{array}\right) \begin{matrix} -3 \;\; -5 \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & -4 & -1 & -4 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ -\frac{1}{3} \\ + \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & -4 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ 4 \;\; - \\ \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

och vi kan avläsa lösningen

$$x_1 = -2, \quad x_2 = 0 \quad \text{och} \quad x_3 = 4.$$

Kontroll:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -2 + 0 + 4 = 2, \\ 3x_1 + 2x_3 &= 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 4 = 2, \\ 5x_1 + x_2 + 4x_3 &= 5 \cdot (-2) + 0 + 4 \cdot 4 = 6, \\ 4x_2 + x_3 &= 4 \cdot 0 + 4 = 4. \end{aligned}$$

L1.15a Bestäm konstanten a så att ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ 3x - y + 6z = 2, \\ 6x + 2y + 9z = a, \end{cases}$$

har lösningar och ange alla dessa.

I ekvationssystemet ska vi betrakta a som en fristående parameter. För olika värden på a får vi olika ekvationsystem och vi ska bestämma vilka av dessa som har en lösning och vilka a-värden som ger oss dessa lösbara ekvationssystem.

Planen är att vi gausseliminerar systemet (med ett allmänt a) och försöker tolka sluttablån. Vi kan då se vilka a-värden som ger lösningar.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 6 & 2 \\ 6 & 2 & 9 & a \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 3 & a-6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & a-5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{7}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & a-5 \end{array}\right)$$

I sluttablåns sista rad står det $0 = a - 5$ och för att systemet ska ha lösningar krävs att denna rad är $0 = 0$, dvs $a = 5$. Om $a = 5$ så kan vi lösa ut x och y i termer av z och få en parameterlösning.

$$\begin{cases} x = \frac{3}{4} - \frac{7}{4}t, \\ y = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}t, \\ z = t, \end{cases} \qquad (t \text{ parameter}).$$

L1.15b Bestäm konstanterna a och b så att ekvationssystemet

$$\begin{cases} 3x + 7y = a, \\ 4x + 8y = b, \\ x + y = a, \\ x + 5y = 1, \end{cases}$$

har lösningar och ange dessa.

Vi går tillväga på samma sätt som i a-uppgiften. Gausseliminering ger

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 7 & a \\ 4 & 8 & b \\ 1 & 1 & a \\ 1 & 5 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$
\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 1 \\ 4 & 8 & b \\ 1 & 1 & a \\ 3 & 7 & a \end{array}\right)
\sim
\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 1 \\ 0 & -12 & b-4 \\ 0 & -4 & a-1 \\ 0 & -8 & a-3 \end{array}\right)
\sim
\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{5}{4}a-\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -3a+b-1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4}a+\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -a-1 \end{array}\right)
\sim
\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{5}{4}a-\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4}a+\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -3a+b-1 \\ 0 & 0 & -a-1 \end{array}\right)
$$

För att systemet ska ha lösningar måste de två sista raderna vara av typen $0 = 0$, d.v.s.

$$-3a+b-1=0 \qquad \text{och} \qquad -a-1=0,$$

vilket ger $a=-1$ och $b=-2$. I detta fall blir ekvationssystemet

$$
\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)
$$

och vi har lösningen $x=-\frac{3}{2}$ och $y=\frac{1}{2}$.

Vi avslutar med att kontrollera svaret,

$$
\begin{aligned}
3x+7y &= 3\cdot\left(-\tfrac{3}{2}\right)+7\cdot\tfrac{1}{2} = -1 = a,\\
4x+8y &= 4\cdot\left(-\tfrac{3}{2}\right)+8\cdot\tfrac{1}{2} = -2 = b,\\
x+y &= -\tfrac{3}{2}+\tfrac{1}{2} = -1 = a,\\
x+5y &= -\tfrac{3}{2}+5\cdot\tfrac{1}{2} = 1.
\end{aligned}
$$

L1.18 Lös följande system simultant

$$
\begin{cases} x+2y+3z=1,\\ 3x-y+z=0,\\ x-y-z=0, \end{cases}
\qquad
\begin{cases} x+2y+3z=0,\\ 3x-y+z=1,\\ x-y-z=0, \end{cases}
\qquad \text{och} \qquad
\begin{cases} x+2y+3z=0,\\ 3x-y+z=0,\\ x-y-z=1. \end{cases}
$$

De tre systemen har alla samma vänsterled, så när vi radreducerar respektive system till trappstegsform utför vi exakt samma radoperationer tre gånger eftersom det bara är vänsterledets utseende som styr vilka radoperationer som väljs.

Ett sätt att lösa alla tre systemen är att först lösa ett av systemen och sedan återanvända radoperationerna för de två andra systemen, men det är skrivmässigt mer ekonomiskt att istället rada upp de olika högerleden bredvid varandra och gausseliminera allt på en gång,

$$
\left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).
$$

De tre högerledskolumnerna påverkar inte varandra när vi utför radoperationerna.

$$
\left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)
\sim
\left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -8 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)
\sim
\left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{8}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & 0 \\ 0 & -3 & -4 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)
\sim
\left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 0 & \frac{5}{7} & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{8}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{3}{7} & 1 \end{array}\right)
\sim
\left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 0 & \frac{5}{7} & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{7}{4} \end{array}\right)
\sim
$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{7}{4} \end{array}\right)$$

Från de tre högerledskolumnerna kan vi nu avläsa respektive systems lösning,

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}, \\ y = 1, \\ z = -\frac{1}{2}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -\frac{1}{4}, \\ y = -1, \\ z = \frac{3}{4}, \end{cases} \qquad \text{resp.} \qquad \begin{cases} x = \frac{5}{4}, \\ y = 2, \\ z = -\frac{7}{4}. \end{cases}$$

Vi kontrollerar också lösningarna

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= \tfrac{1}{2} + 2 \cdot 1 + 3 \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right) = 1, \\ 3x - y + z &= 3 \cdot \tfrac{1}{2} - 1 - \tfrac{1}{2} = 0, \\ x - y - z &= \tfrac{1}{2} - 1 - \left(-\tfrac{1}{2}\right) = 0, \\ x + 2y + 3z &= -\tfrac{1}{4} + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot \tfrac{3}{4} = 0, \\ 3x - y + z &= 3 \cdot \left(-\tfrac{1}{4}\right) - (-1) + \tfrac{3}{4} = 1, \\ x - y - z &= -\tfrac{1}{4} - (-1) - \tfrac{3}{4} = 0, \\ x + 2y + 3z &= \tfrac{5}{4} + 2 \cdot 2 + 3 \cdot \left(-\tfrac{7}{4}\right) = 0, \\ 3x - y + z &= 3 \cdot \tfrac{5}{4} - 2 - \tfrac{7}{4} = 0, \\ x - y - z &= \tfrac{5}{4} - 2 - \left(-\tfrac{7}{4}\right) = 1. \end{aligned}$$