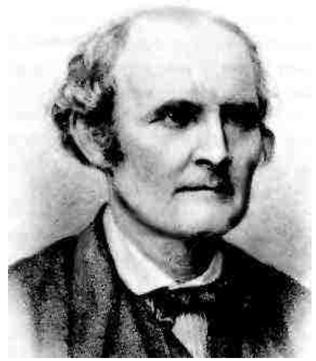
Avsnitt 2

Matriser

Att ställa upp siffror i rektangulära tabeller går långt tillbaka i tiden, men den egentliga matristeorin utvecklades relativt sent.

Det var den engelska matematikern James Joseph Sylvester som runt år 1850 införde namnet matris för en rektangulär tabell av tal. Ordet matris kommer från det latinska ordet *matrix* som betyder livmoder (han tänkte sig matrisen som en typ av behållare).

Den egentliga skaparen av matrisbegreppet kan sägas vara den engelska matematikern Arthur Cayley (1821–1895) som införde matriser som självständiga objekt. I den betydelsefulla boken *Memoir on the theory of matrices* som kom ut år 1858 sammanfattade Cayley sina grundläggande insatser inom matristeorin: addition, subtraktion, multiplikation med skalär, matrismultiplikation och matrisinvers.



Arthur Cayley

Vad är en matris?

En matris är ett rektangulärt schema av tal,

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Vi har redan använt matriser som ett kompakt skrivsätt för linjära ekvationssystem. Nu ska vi studera matriser lite mer ingående.

Storlek

En matris sägs ha storleken $m \times n$ om den har m rader och n kolumner.

$$m \text{ rader} \left[\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 4 & \dots & 9 \\ 0 & 6 & \dots & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 4 & 2 & \dots & 5 \end{pmatrix}}_{n \text{ kolumner}} \right.$$

Om $m = n$ sägs matrisen vara kvadratisk.

För att kunna hänvisa till enskilda element (tal) i en matris så indexerar vi matrisen så att (i, j)-elementet betyder det element som befinner sig på rad i och kolumn j.

Övning 1

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Storlek =
$(2, 3)$-elementet =
$(1, 4)$-elementet =

b) $\begin{pmatrix} -1 & 7 & 13 & 4 & 8 \end{pmatrix}$

Storlek =
$(1, 4)$-elementet =
$(3, 1)$-elementet =

c) $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

Storlek =
$(2, 1)$-elementet =
$(1, 1)$-elementet =

Diagonalelement

I en kvadratisk matris kallas element som har samma rad- och kolumnindex för diagonalelement.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 8 \\ 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 6 & 4 & 5 \\ 4 & 8 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Ett beteckningssätt för allmänna matriser

Om vi behöver skriva upp en allmän 2×2-matris skulle vi typiskt skriva

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

där a, b, c och d är matrisens element, men för större matriser behövs ett mer enhetligt och systematiskt skrivsätt. Ett alternativt sätt är istället att skriva a_{ij} för elementet i position (i,j). Exempelvis skrivs en allmän 4×2-matris då som

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{pmatrix},$$

där a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, a_{31}, a_{32}, a_{41} och a_{42} är matrisens element.

Övning 2

Skriv upp en allmän 2×3-matris.

Om vi behöver skriva upp en allmän $m\times n$-matris, där m och n inte är kända, skriver vi matrisen med utelämningspunkter

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

De enkla räknesätten

Vi ska nu definiera tre enkla räknesätt för matriser. De är utvidgningar av den vanliga additionen, subtraktionen och multiplikationen från tal till matriser.

Addition och subtraktion

Summan och differensen mellan två matriser får vi genom att elementvis addera respektive subtrahera matriserna.

Exempel

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 0 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+1 & 3+0 \\ -2+3 & 0+4 \\ 8+1 & 5+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 4 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 0 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-1 & 3-0 \\ -2-3 & 0-4 \\ 8-1 & 5-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -5 & -4 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$$

Observera att det bara går att addera och subtrahera matriser som har samma storlek.

Övning 3

a) $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} =$

b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} =$

Multiplikation med skalär

När vi multiplicerar en matris med ett tal (skalär) multiplicerar vi varje element i matrisen med talet.

Exempel

$$3\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 7 & 0 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 2 & 3\cdot 0 & 3\cdot 3 \\ 3\cdot 1 & 3\cdot 7 & 3\cdot 0 \\ 3\cdot 5 & 3\cdot 2 & 3\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 9 \\ 3 & 21 & 0 \\ 15 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Övning 4

a) $-6\begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} =$

b) $2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} =$

Transponat

Transponatet av en matris är den matris vi får om vi låter raderna istället bli kolumner: första raden blir första kolumnen, andra raden blir andra kolumnen o.s.v.

Transponatet betecknas med ett T i exponenten. Exempelvis är

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 10 \\ 2 & 5 & 8 & 11 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}.$$

Eftersom rader blir kolumner och kolumner blir rader vid transponering, så blir en $m \times n$-matris (m rader, n kolumner) en $n \times m$-matris (n rader, m kolumner) efter transponering.

Övning 5

a) $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 8 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^T =$

b) Om A och B är 3×2-matriser, vilken storlek har matrisen $(A+3B)^T$?

Matrismultiplikation

Vi ska nu definiera multiplikation mellan matriser. Vid första påsyn kan definitionen verka onaturlig men den har sitt ursprung i linjära ekvationssystem.

Matrismultiplikationen kommer ge oss ett kompakt sätt att sammanfatta linjära ekvationssystem, men viktigare är den ger oss ett enhetligt sätt att behandla och räkna med linjära ekvationssystem och liknande problem.

Men innan vi går djupare in på den förklaringen ska vi först se hur vi rent konkret definierar matrismultiplikationen.

Produkt av en rad med en kolumn

En rad och en kolumn kan multipliceras ihop om de har lika många element. Vi går igenom ett exempel för att visa hur det går till.

I produkten

$$\begin{pmatrix} 7 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

väljer vi först elementet längst till vänster och det översta elementet och multiplicerar ihop dem

$$\begin{pmatrix} \boxed{7} & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boxed{8} \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{7 \cdot 8} + \cdots .$$

Sedan lägger vi till produkten av nästföljande element i raden och kolumnen

$$\begin{pmatrix} 7 & \boxed{3} & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ \boxed{2} \\ 0 \end{pmatrix} = 7 \cdot 8 + \boxed{3 \cdot 2} + \cdots .$$

Slutligen adderas de två sista elementen ihopmultiplicerade

$$\begin{pmatrix} 7 & 3 & \boxed{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ \boxed{0} \end{pmatrix} = 7 \cdot 8 + 3 \cdot 2 + \boxed{2 \cdot 0} = 62.$$

Allmänt definieras produkten mellan en rad och en kolumn som

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n .$$

Övning 6

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} =$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} =$

Produkt av rader med en kolumn

I en produkt av typen

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

betraktar vi den vänstra matrisen som bestående av rader som vi multiplicerar ihop med kolumnmatrisen,

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 7 + 2 \cdot 1 \\ \\ \\ \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 3 \cdot 7 + 0 \cdot 1 \\ \\ \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 21 \\ 1 \cdot 7 + 4 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 21 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

Övning 7

a) $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 4 & 7 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} =$

Anledningen till detta sätt att multiplicera ihop matriser är att vi kan sammanfatta linjära ekvationssystem som en produkt mellan en koefficientmatris och en kolumnmatris av de okända variablerna.

Exempel

Skriv det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} 3x + y - z = 2 \\ -x + z = 8 \\ 5x - 2y + z = 11 \end{cases}$$

som en matrisekvation.

I vänsterledet har vi linjära uttryck i variablerna så vi kan skriva dem som en matrisprodukt mellan en koefficientmatris och en kolumnmatris av x, y och z,

$$\begin{pmatrix} 3x + y - z \\ -x + z \\ 5x - 2y + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Denna produkt ska vara lika med högerledet,

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

Detta är ekvationssystemet skrivet som en matrisekvation.

Produkt av rader med kolumner

När vi multiplicerar ihop två matriser med varandra multipliceerar vi ihop rader med kolumner. Rader i den vänstra matrisen multipliceras med kolumner i den högra matrisen.

Exempel

Beräkna produkten $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 7 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -3 & 9 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Vi multiplicerar först ihop raderna med den första kolumnen,

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 7 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -3 & 9 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3\cdot 5 + 2\cdot(-3) + 0\cdot 0 & \\ -1\cdot 5 + 7\cdot(-3) + 3\cdot 0 & \\ 2\cdot 5 + 4\cdot(-3) + 8\cdot 0 & \end{pmatrix},$$

och sedan raderna med den andra kolumnen

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 7 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -3 & 9 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & 3\cdot 6 + 2\cdot 9 + 0\cdot 2 \\ -26 & -1\cdot 6 + 7\cdot 9 + 3\cdot 2 \\ -2 & 2\cdot 6 + 4\cdot 9 + 8\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 36 \\ -26 & 63 \\ -2 & 64 \end{pmatrix}.$$

När är matrismultiplikationen definierad?

För att en matrismultiplikation AB ska gå att utföra måste antalet kolumner i A vara lika med antalet rader i B så att vi kan matcha elementen mot varandra när vi multiplicerar rader med kolumner

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & & \\ b_{21} & & \\ \ldots & & \\ b_{m1} & & \end{pmatrix}.$$

Om vi skriver matrisernas storlekar under matriserna i produkten,

$$\underset{m\times n}{A}\ \underset{k\times \ell}{B}$$

så måste de inre indexen vara lika för att multiplikationen ska vara definierad

$$\underset{m\times \underbrace{n\quad k}_{=}\times \ell}{A\qquad B}$$

Produktmatrisens storlek kommer att vara lika med de yttre indexen,

$$\underset{\underbrace{m\times n\quad k\times \ell}}{A\qquad B} = \underset{m\times \ell}{C}$$

Övning 8

a) Om A och B är $3{\times}4$-matriser, är produkten AB^T definierad? och vilken storlek har i sådant fall produktmatrisen?

Några speciella matriser

Vi ska ge namn åt några typer av matriser som dyker upp ganska ofta.

Nollmatris

En matris som bara består av nollor kallas för en nollmatris,

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Den fungerar som nolla när man räknar med matriser: $A + O = O + A = A$.

Enhetsmatrisen

En kvadratisk matris som har ettor på diagonalen och nollor annars kallas för en enhetsmatris

$$\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ldots$$

och betecknas med E.

Enhetsmatrisen fungerar som en etta när man multiplicerar matriser: $AE = EA = A$.

Övning 9

Beräkna $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 4 \\ 8 & 6 \end{pmatrix} =$

Diagonalmatris

Om en kvadratisk matris har nollor utanför diagonalen så kallas matrisen för en diagonalmatris.

Övning 10

Vilka matriser är diagonalmatriser?

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *d)* $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Triangulär matris

När en matris har nollor under diagonalen kallas den för en övertriangulär matris (eller högertriangulär) och en matris som har nollor ovanför diagonalen kallas för en undertriangulär matris (eller vänstertriangulär).

Övning 11

Över- eller undertriangulär?

a) $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *d)* $\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Symmetrisk matris

En kvadratisk matris är symmetrisk om varje element är lika med sitt spegelelement i diagonalen,

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Elementen på diagonalen är sina egna spegelbilder.

Symmetrivillkoret kan också uttryckas som att en matris A är symmetrisk om

$$A^T = A.$$

Övning 12

Vilka matriser är symmetriska?

a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 4 & 7 & -1 & 0 \\ 7 & 5 & 8 & 3 \\ -1 & 9 & 6 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Antisymmetrisk matris

I en antisymmetrisk matris har spegelelementen istället olika tecken. Speciellt är diagonalelementen lika med noll eftersom de är sina egna spegelbilder (och måste ha olika tecken),

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -4 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Detta kan också uttryckas som att matrisen A är antisymmetrisk om

$$A^T = -A.$$

Övning 13

Symmetrisk eller antisymmetrisk?

a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 13 & 5 \\ 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Linjära ekvationssystem som matrisekvationer

Med vårt sätt att definiera matrismultiplikation kan vi skriva ett allmänt linjärt ekvationssystem

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

som en matrisekvation

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Tidigare har vi löst linjära ekvationssystem med hjälp av elementära radoperationer och vi ska se att just det lösningssättet motsvaras av att vi vänstermultiplicerar matrisekvationen med en matris.

Vi ska först gå igenom en sats som kopplar ihop radoperationer med matrismultiplikationen.

Radoperationer

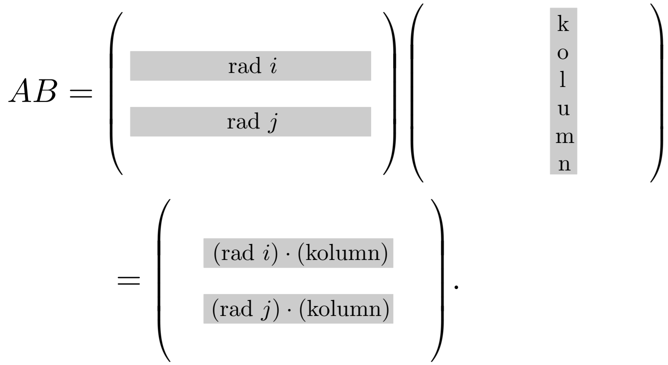
Sambandet mellan radoperationer och matrismultiplikationer ges av följande sats.

Sats $(AB)\circlearrowleft = (A\circlearrowleft)B,$
$(AB)\circledast = (A\circledast)B,$
$(AB)\updownarrow = (A\updownarrow)B.$

Att utföra en radoperation på en matrisprodukt AB är alltså samma sak som att först utföra radoperationen på A och sedan multiplicera med B.

Vi ska inte bevisa denna sats i detalj utan vi nöjer oss med att undersöka varför $(AB)\updownarrow = (A\updownarrow)B$ gäller.

När vi multiplicerar ihop två matriser A och B så bestäms elementen på rad i och rad j i produktmatrisen genom att multiplicera rad i resp. rad j i matrisen A med kolumnerna i B.



Om vi nu utför radoperationen $\updownarrow$ mellan rad i och rad j på produktmatrisen får vi

$$(AB)\updownarrow = \begin{pmatrix} \\ \text{(rad } i) \cdot \text{(kolumn)} \\[1ex] \text{(rad } j) \cdot \text{(kolumn)} \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \text{(rad } j) \cdot \text{(kolumn)} \\[1ex] \text{(rad } i) \cdot \text{(kolumn)} \\ \\ \end{pmatrix},$$

men vi får samma resultat om vi först byter plats på rad i och rad j i matrisen A,

$$(A\updownarrow) = \begin{pmatrix} \\ \text{rad } i \\[1ex] \text{rad } j \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \text{rad } j \\[1ex] \text{rad } i \\ \\ \end{pmatrix}$$

och sedan multiplicerar med kolumnerna i B,

$$\begin{aligned} (A\updownarrow)B &= \begin{pmatrix} \\ \text{rad } j \\[1ex] \text{rad } i \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{k} \\ \text{o} \\ \text{l} \\ \text{u} \\ \text{m} \\ \text{n} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \\ \text{(rad } j) \cdot \text{(kolumn)} \\[1ex] \text{(rad } i) \cdot \text{(kolumn)} \\ \\ \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Detta visar att $(AB)\updownarrow = (A\updownarrow)B$.

Gausseliminering

När vi löser ett linjärt ekvationssystem

$$Ax = b$$

med gausseliminering så ställer vi upp ett räkneschema $(A \,|\, b)$ och utför radoperationer tills den vänstra delen är i trappstegsform. Vi har då fått ett radreducerat ekvationssystem

$$(A\text{♀}\updownarrow\cdots\text{♂})x = (b\text{♀}\updownarrow\cdots\text{♂})$$

där vi direkt kan avläsa lösningen.

Om vi nu ser matriserna A och b som produkter EA och Eb så kan radoperationerna flyttas till enhetsmatrisen E

$$\begin{aligned} A\text{♀}\updownarrow\cdots\text{♂} &= (EA)\text{♀}\updownarrow\cdots\text{♂} = (E\text{♀}\updownarrow\cdots\text{♂})A, \\ b\,\text{♀}\updownarrow\cdots\text{♂} &= (E\,b\,)\text{♀}\updownarrow\cdots\text{♂} = (E\text{♀}\updownarrow\cdots\text{♂})\,b\,. \end{aligned}$$

Det radreducerade systemet är alltså lika med

$$(E\text{♀}\updownarrow\cdots\text{♂})Ax = (E\text{♀}\updownarrow\cdots\text{♂})b$$

eller

$$UAx = Ub$$

om vi sätter $U = E\text{♀}\updownarrow\cdots\text{♂}$.

Med andra ord, att radreducera ett ekvationssystem till trappstegsform är detsamma som att vänstermultiplicera båda led med en matris U.

Ett räkneschema

Vi har just sett att om vi utför radoperationer som tar matrisen A till en trappstegsmatris T,

$$A \bigcirc \circlearrowright \cdots \bigcirc = T,$$

och utför samma radoperationer på enhetsmatrisen E så får vi en matris U,

$$U = E \bigcirc \circlearrowright \cdots \bigcirc,$$

som gör att $UA = T$.

Ställer vi därför upp A och E bredvid varandra i ett räkneschema $(A \,|\, E)$ och använder radoperationer så att den vänstra halvan A övergår till trappstegsmatrisen T så kommer samma radoperationer utföras på den högra halvan och reducera E till U,

$$(A \,|\, E) \sim \cdots \sim (T \,|\, U).$$

Exempel

Vi ska lösa ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x - 3y + 2z = 1 \\ 2x - 3y - z = 4 \\ 4x - 6y + 5z = 1 \end{cases}$$

genom att bestämma den matris U som vänstermultiplicerat med systemet ger ett trappstegssystem.

Det första steget är att vi skriver ekvationssystemet som en matrisekvation

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eller mer symboliskt $Ax = b$.

Vi ställer nu upp räkneschemat $(A \,|\, E)$ och radreducerar tills den vänstra halvan är i trappstegsform.

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -6 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} - \quad -2 \quad \tfrac{1}{2} \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -\frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{5}{2} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 1 & 3 \end{array}\right)
$$

Från den högra halvan avläser vi

$$
U = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -7 & 1 & 3 \end{pmatrix}.
$$

Vi har nu att

$$
UA = T = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
$$

$$
U\,b = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -7 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},
$$

vilket betyder att det trappstegsreducerade systemet $UAx = Ub$ därmed är

$$
\begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.
$$

Lösningen kan vi nu direkt avläsa till

$$
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\,t \\ t \\ -1 \end{pmatrix} \qquad (t \text{ parameter}).
$$

Matrisinvers

Vi såg nyss att när vi löser en matrisekvation (linjärt ekvationssystem)

$$
Ax = b
$$

så vänstermultiplicerar vi båda led med en kvadratisk matris U

$$
UAx = Ub
$$

så att UA är i trappstegsform.

Om matrisen A är kvadratisk så har systemet exakt en lösning om det finns en trappstegsetta i varje kolumn, d.v.s. om trappstegsformen är lika med

$$
UA = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = E.
$$

Vi säger då att U är en invers till A, och skriver A^{-1} istället för U.

Beräkning av matrisinversen

Vi sammanfattar: Om

- A är en kvadratisk matris, och
- A har trappstegformen E

då har A en invers A^{-1}, som dessutom kan beräknas med räkneschemat

$$(A\,|\,E) \sim \cdots \sim (E\,|\,A^{-1}).$$

Exempel

Undersök om matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

är inverterbar och bestäm i sådant fall inversen.

Vi ställer upp räkneschemat

$$(A\,|\,E)$$

och radreducerar tills vi når trappstegsform. Om trappstegsformen är E så har vi samtidigt visat att A är inverterbar och beräknat A^{-1}, annars om trappstegsformen inte är E har vi visat att A inte är inverterbar.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -6 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 16 & -9 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

Matrisen A är alltså inverterbar och inversen är lika med

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 16 & -9 & -6 \\ -5 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Som en extra kontroll räknar vi ut produkten $A^{-1}A$ som ska vara lika med E,

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} 16 & -9 & -6 \\ -5 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Snabbformel för 2×2-matriser

För 2×2-matriser finns en minnesregel för inversen som är praktisk att lära sig,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

(D.v.s. byt plats på diagonalelementen och byt tecken på de andra två elementen. Multiplicera sedan med 1 delat på differensen mellan korsvis multiplicerade element.)

Övning 15

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} =$

Räkneregler

Det finns en lång rad räkneregler för matriser. Räknereglerna anger exakt hur vi får räkna med matriser. Vi kan t.ex. använda reglerna för att skriva om och förenkla matrisuttryck innan vi börjar själva uträkningen.

I reglerna nedan är A, B och C matriser, a och b skalärer (d.v.s. vanliga tal) och m och n heltal.

Regler för addition

Eftersom addition och multiplikation med skalär sker komponentvis i matriserna ärver vi samma räkneregler som gäller för vanliga tal.

- $A+B=B+A$ (kommutativa lagen)
- $A+(B+C)=(A+B)+C$ (associativa lagen)
- $a(bA)=(ab)A$
- $a(A+B)=aA+aB$ (distributiva lagen)
- $(a+b)A=aA+bA$ (distributiva lagen)

Regler för multiplikation

Matrismultiplikationen uppfyller samma räkneregler som gäller för vanliga tal, men med ett viktigt undantag: den kommutativa lagen gäller inte, d.v.s.

$$AB \neq BA$$

nästan alltid.

- $a(AB)=(aA)B=A(aB)$
- $A(BC)=(AB)C$ (associativa lagen)
- $A(B+C)=AB+AC$ (vänsterdistributiva lagen)
- $(B+C)A=BA+CA$ (högerdistributiva lagen)

I korthet kan man säga att vi räknar med matriser på samma sätt som med vanliga tal men att vi inte får byta plats på faktorer i en produkt.

Potensregler

Potenser av en (kvadratisk) matris definieras på samma sätt som för tal,

$$\begin{aligned} A^n &= A \cdot A \cdots A \qquad (n \text{ faktorer}) \\ A^0 &= E \\ A^{-n} &= (A^{-1})^n \end{aligned}$$

och uppfyller reglerna

- $A^{m+n} = A^m A^n$
- $(A^m)^n = A^{mn}$

Tänk på att $(AB)^m \neq A^m B^m$ eftersom $AB \neq BA$ i allmänhet.

Transponatregler

Observera att faktorerna byter plats i den sista transponatregeln,

- $A^{TT} = A$
- $(A+B)^T = A^T + B^T$
- $(aA)^T = aA^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$

Inversregler

Liksom vid transponering byter faktorerna plats när en produkt inverteras,

- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(aA)^{-1} = a^{-1}A^{-1}$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Sammanfattning

De flesta regler är ganska ”självklara” men de regler man bör vara extra observant på är

- $AB \neq BA$ i allmänhet
- $(AB)^T = B^T A^T$ (ordningen!)
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (ordningen!)
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Övning 16

Förenkla uttrycken

a) $(A+B)^2 =$

b) $(A-B)^{-1} =$

c) $(A+A^T)^T =$

d) $(A+AB)^{-1}A =$

Exempel

Bestäm $\quad (A^T + A^{-1})^T A^T \quad$ där $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ett sätt att räkna ut uttrycket är att bygga upp det från grunden: först räkna ut A^T och A^{-1}, sedan $A^T + A^{-1}$, $(A^T + A^{-1})^T$ och till sist $(A^T + A^{-1})^T A^T$.

Vi ska istället först förenkla uttrycket med räknereglerna innan vi börjar räkna,

$$\begin{aligned} (A^T + A^{-1})^T A^T &= \bigl(A(A^T + A^{-1})\bigr)^T. \\ &= (AA^T + AA^{-1})^T = (AA^T + E)^T. \\ &= (AA^T)^T + E^T. \end{aligned}$$

Eftersom $E^T = E$ (enhetsmatrisen är symmetrisk) får vi slutligen

$$= A^{TT} A^T + E = AA^T + E.$$

Hela uttrycket är alltså lika med $AA^T + E$,

$$AA^T + E = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 14 & 23 & 13 \\ 23 & 49 & 14 \\ 13 & 14 & 17 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 23 & 13 \\ 23 & 50 & 14 \\ 13 & 14 & 18 \end{pmatrix}.$$

Avsnitt 2. Matriser

L5.1 Låt

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ och } D = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 5 \\ 7 & 9 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bestäm i de fall räkneuttrycken är meningsfulla

a) $A + 3B$,
b) $A + 3C$,
c) $A + B^T$,
d) $C + D^T$,
e) $C - 3D$,
f) $2(A + 2B^T)^T - 4B$.

För att kunna addera och subtrahera två matriser krävs att de har samma storlek. Vi kan alltså avgöra om matrisuttrycken är definierade genom att undersöka varje terms storlek och se om de överensstämmer.

a) I uttrycket $A + 3B$ är A en 2×2-matris (2 rader, 2 kolumner) och B en 2×2-matris (och därmed är $3B$ en 2×2-matris) så hela uttrycket är definierat. När vi räknar ut resultatmatrisen sker additionen och multiplikationen med 3 komponentvis,

$$\begin{aligned} A + 3B &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3\cdot 3 & 3\cdot 5 \\ 3\cdot 7 & 3\cdot 9 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2+3\cdot 3 & 3+3\cdot 5 \\ 1+3\cdot 7 & 0+3\cdot 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 18 \\ 22 & 27 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

b) Vi har att A är en 2×2-matris och att C är en 3×2-matris. Då är inte uttrycket $A + 3C$ definierat eftersom termerna är av olika storlek.

c) När vi transponerar en matris låter vi raderna i matrisen bli kolumner i den transponerade matrisen. T.ex. är

$$B^T = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}.$$

En $m\times n$-matris blir alltså en $n\times m$-matris efter transponeringen. I vårt fall blir B^T en 2×2-matris och additionen $A + B^T$ är därmed definierad. Vi får

$$A + B^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3 & 3+7 \\ 1+5 & 0+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

d) Matrisen D har storleken 2×3 så D^T har storleken 3×2, och eftersom C är 3×2 så är uttrycket $C + D^T$ definierat,

$$\begin{aligned} C + D^T &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 5 & 5 \\ 7 & 9 & -1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 9 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2+3 & -1+7 \\ 0+5 & 1+9 \\ 0+5 & 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 5 & 10 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

e) Matrisen C är 3×2 medan D (och $3D$) är 2×3 så uttrycket $C - 3D$ är odefinierat.

f) För att hela uttrycket ska vara definierat måste varje deluttryck vara definierat. Vi börjar med att identifiera deluttrycket "längst in"

$$2\big(A + 2B^T\big)^T - 4B.$$

Matriserna A och B^T är båda 2×2-matriser så $A + 2B^T$ är definierat och ger en 2×2-matris,

$$2\big(\underbrace{A + 2B^T}_{2\times 2}\big)^T - 4B.$$

Sedan transponerar vi vårt deluttryck och får en ny 2×2-matris

$$\underbrace{2\big(A + 2B^T\big)^T}_{2\times 2} - 4B.$$

Den högra termen $4B$ i uttrycket är 2×2 så vi ser att differensen mellan $2(A + 2B^T)^T$ och $4B$ är definierat. Alltså är hela uttrycket definierat.

Eftersom hela uttrycket är ganska komplicerat börjar vi med att förenkla det,

$$\begin{aligned} 2\big(A + 2B^T\big)^T - 4B &= 2\big(A^T + (2B^T)^T\big) - 4B = 2\big(A^T + 2B^{TT}\big) - 4B \\ &= 2A^T + 4B^{TT} - 4B = 2A^T + 4B - 4B = 2A^T. \end{aligned}$$

Uttrycket är alltså lika med

$$2\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^T = 2\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 2 & 2\cdot 1 \\ 2\cdot 3 & 2\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

L5.2 Låt A, B, C och D vara som i uppgift L5.1. Bestäm X så att

a) $7A + X = B$, respektive

c) $(3C + X)^T = D$.

a) Matriser uppfyller samma räkneregler som vanliga tal när det gäller addition, subtraktion och multiplikation med skalär, så vi löser matrisekvationen på samma sätt som vi skulle göra om vi hade en vanlig ekvation.

Strategin är att samla X ensamt i ena ledet. Vi subtraherar därför $7A$ från båda led,

$$7A + X - 7A = B - 7A \qquad \Leftrightarrow \qquad X = B - 7A.$$

Med siffror får vi

$$\begin{aligned} X = B - 7A &= \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} - 7\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7\cdot 2 & 7\cdot 3 \\ 7\cdot 1 & 7\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-7\cdot 2 & 5-7\cdot 3 \\ 7-7\cdot 1 & 9-7\cdot 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -11 & -16 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

För att vara säkra på att lösningen är rätt kontrollerar vi svaret genom att stoppa in X i ursprungsekvationen

$$\begin{aligned} 7A + X = 7\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -11 & -16 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 7\cdot 2 - 11 & 7\cdot 3 - 16 \\ 7\cdot 1 - 0 & 7\cdot 0 + 9 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} = B. \end{aligned}$$

b) Eftersom matrisen X ligger inbakad i ett uttryck som är transponerat, transponerar vi båda led och använder transponatregeln $M^{TT} = M$,

$$(3C + X)^{TT} = D^T \qquad \Leftrightarrow \qquad 3C + X = D^T.$$

Sedan subtraherar vi $3C$ från båda led för att få X ensamt i ena ledet,

$$3C + X - 3C = D^T - 3C \qquad \Leftrightarrow \qquad X = D^T - 3C.$$

Stoppar vi in siffror fås

$$\begin{aligned} X = D^T - 3C &= \begin{pmatrix} 3 & 5 & 5 \\ 7 & 9 & -1 \end{pmatrix}^T - 3\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3-3\cdot 2 & 7-3\cdot(-1) \\ 5-3\cdot 0 & 9-3\cdot 1 \\ 5-3\cdot 0 & -1-3\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 10 \\ 5 & 6 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Vi kontrollerar också svaret

$$\begin{aligned} (3C + X)^T &= \left[3\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 10 \\ 5 & 6 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}\right]^T \\ &= \begin{pmatrix} 3\cdot 2 - 3 & 3\cdot(-1) + 10 \\ 3\cdot 0 + 5 & 3\cdot 1 + 6 \\ 3\cdot 0 + 5 & 3\cdot 0 - 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 9 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}^T \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 5 & 5 \\ 7 & 9 & -1 \end{pmatrix} = D. \end{aligned}$$

L5.5 Enligt definition 5.2 är en matris M symmetrisk om $M^T = M$. Om man istället har att $M^T = -M$ så säger man att M är antisymmetrisk.

a) Vilka av följande matriser är symmetriska och vilka är antisymmetriska?

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 3 \\ 3 & 7 & 3 \\ 3 & 7 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 9 \\ 7 & 0 & 11 \\ 9 & 11 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 9 \\ -7 & 0 & 11 \\ -9 & -11 & 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 7 & 9 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Låt M vara kvadratisk och $X = M + M^T$, $Y = M - M^T$. Visa att X är symmetrisk och att Y är antisymmetrisk.

a) Först och främst måste en matris vara kvadratisk för att kunna vara symmetrisk eller antisymmetrisk. Det utesluter matriser D och G.

En symmetrisk matris känner vi igen på att den är spegelsymmetrisk kring diagonalen; ett element är lika med sitt spegelelement.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} a_{12} &= a_{21} \\ a_{13} &= a_{31} \\ a_{23} &= a_{32} \end{aligned}$$

(Elementen på diagonalen är sina egna spegelbilder.) Med detta kriterium ser vi att

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 3 \\ 3 & 7 & 3 \\ 3 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

A är inte symmetrisk

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 9 \\ 7 & 0 & 11 \\ 9 & 11 & 5 \end{pmatrix}$$

B är symmetrisk

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

C är symmetrisk

$$\begin{pmatrix} 0 & 7 & 9 \\ -7 & 0 & 11 \\ -9 & -11 & 0 \end{pmatrix}$$

F är inte symmetrisk

En antisymmetrisk matris har också en typ av symmetri kring diagonalen, men här kräver vi att spegelelementen har omvänt tecken,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} a_{12} &= -a_{21} \\ a_{13} &= -a_{31} \\ a_{23} &= -a_{32} \end{aligned}$$

Eftersom diagonalelementen är sina egna spegelbilder måste de vara lika med noll, $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0$ (om de ska uppfylla $a_{11} = -a_{11}$ o.s.v.)

Vi ser direkt att A och B inte kan vara antisymmetriska eftersom de har nollskilda diagonalelement. Matriserna C och F är däremot antisymmetriska

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 7 & 9 \\ -7 & 0 & 11 \\ -9 & -11 & 0 \end{pmatrix}.$$

Svaret blir alltså

Symmetriska:	B, C
Antisymmetriska:	C, F.

b) I detta fall har vi ingen konkret matris att arbeta med så för att visa att matriserna X och Y är symmetrisk resp. antisymmetrisk använder vi de mer allmänna villkoren:

- Matrisen X är symmetrisk om $X^T = X$.
- Matrisen Y är antisymmetrisk om $Y^T = -Y$.

Vi ska alltså visa att

- om $X = M + M^T$ så är $X^T = X$
- om $Y = M - M^T$ så är $Y^T = -Y$.

Med transponatreglerna få vi

- $X^T = (M + M^T)^T = M^T + M^{TT} = M^T + M = M + M^T = X$
- $Y^T = (M - M^T)^T = M^T - M^{TT} = M^T - M = -(M - M^T) = -Y$.

Vi har därmed visat att X är symmetrisk och Y är antisymmetrisk.

L5.6 Låt

$$A=\begin{pmatrix}2&1\\3&2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&-1\\0&7\\5&-2\end{pmatrix},\quad c=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix},$$

$$D=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\quad\text{och}\quad F=\begin{pmatrix}-2&0&1\\-5&0&2\end{pmatrix}.$$

Beräkna de av uttrycken som är meningsfulla

a)	BA	b)	AB	c)	Bc
d)	B^Tc	e)	Dc	f)	D^TB
g)	B^TB	h)	BB^T	i)	FD
j)	DF	k)	c^Tc	l)	cc^T

För att en matrisprodukt MN ska vara definierad måste antalet kolumner i M vara lika med antalet rader i N. Om vi skriver matrisernas storlekar under matriserna i produkten

$$\underset{m\times \underbrace{n\quad k}}{M\qquad N}\!\quad\;\;_{\times\ell}$$

så ska de inre indexen n och k vara lika om vi ska kunna multiplicera ihop matriserna. Produktmatrisen kommer ha samma storlek som de yttre indexen

$$\underbrace{\underset{m\times n}{M}\quad\underset{k\times\ell}{N}}$$

d.v.s. $m\times\ell$.

Vi börjar med att gå igenom hela listan av matrisprodukter så att vi kan sortera bort de produkter där faktorerna är inkompatibla.

a)	$\underset{3\times 2}{B}\ \underset{2\times 2}{A}$, $2 = 2$	b)	$\underset{2\times 2}{A}\ \underset{3\times 2}{B}$, $2 \neq 3$	c)	$\underset{3\times 2}{B}\ \underset{3\times 1}{c}$, $2 \neq 3$
d)	$\underset{2\times 3}{B^T}\ \underset{3\times 1}{c}$, $3 = 3$	e)	$\underset{3\times 3}{D}\ \underset{3\times 1}{c}$, $3 = 3$	f)	$\underset{3\times 3}{D^T}\ \underset{3\times 2}{B}$, $3 = 3$
g)	$\underset{2\times 3}{B^T}\ \underset{3\times 2}{B}$, $3 = 3$	h)	$\underset{3\times 2}{B}\ \underset{2\times 3}{B^T}$, $2 = 2$	i)	$\underset{2\times 3}{F}\ \underset{3\times 3}{D}$, $3 = 3$
j)	$\underset{3\times 3}{D}\ \underset{2\times 3}{F}$, $3 \neq 2$	k)	$\underset{1\times 3}{c^T}\ \underset{3\times 1}{c}$, $3 = 3$	l)	$\underset{3\times 1}{c}\ \underset{1\times 3}{c^T}$, $1 = 1$

Vi räknar nu ut de meningsfulla produkterna.

a) Matrismultiplikationen går till som så att rader i den första matrisen multipliceras ihop med kolumner i den andra matrisen

$$\begin{pmatrix}2&-1\\0&7\\5&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\square&\square\\\square&\square\\\square&\square\end{pmatrix}.$$

$(1,1)$-elementet i produktmatrisen är rad 1 multiplicerad med kolumn 1,

$$\begin{pmatrix}2&-1\\0&7\\5&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot2+(-1)\cdot3&\square\\\square&\square\\\square&\square\end{pmatrix}.$$

Ett allmänt element (i,j) i produktmatrisen får vi genom att multiplicera ihop rad i med kolumn j,

$$\begin{pmatrix}2&-1\\0&7\\5&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\cdot1+(-1)\cdot2\\\square&\square\\\square&\square\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix}2&-1\\0&7\\5&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0\cdot2+7\cdot3&\square\\\square&\square\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix}2&-1\\0&7\\5&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\21&0\cdot1+7\cdot2\\\square&\square\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix}2&-1\\0&7\\5&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\21&14\\5\cdot2+(-2)\cdot3&\square\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix}2&-1\\0&7\\5&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\21&14\\4&5\cdot1+(-2)\cdot2\end{pmatrix}.$$

Alltså är produkten lika med

$$BA=\begin{pmatrix}1&0\\21&14\\4&1\end{pmatrix}.$$

d) B^T är en 2×3-matris och C är en 3×1-matris, så produkten blir en 2×1-matris (de yttre indexen),

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -1 & 7 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \end{pmatrix}.$$

De två elementen räknar vi ut på samma sätt som i a-uppgiften (rader gånger kolumner),

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -1 & 7 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 3 + 0\cdot 2 + 5\cdot 1 \\ \square \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -1 & 7 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -1\cdot 3 + 7\cdot 2 + (-2)\cdot 1 \end{pmatrix}.$$

Alltså är $B^T c = \left(\begin{smallmatrix} 11 \\ 9 \end{smallmatrix}\right)$.

e) Eftersom D är 3×3 och c är 3×1 blir produkten en 3×1-matris,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{pmatrix}.$$

Rader gånger kolumner ger

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot 3 + 1\cdot 2 + 0\cdot 1 \\ 0\cdot 3 + 0\cdot 2 + 1\cdot 1 \\ 1\cdot 3 + 0\cdot 2 + 0\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

f) Vi får

$$\begin{aligned} D^T B &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 7 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0\cdot 2 + 0\cdot 0 + 1\cdot 5 & 0\cdot(-1) + 0\cdot 7 + 1\cdot(-2) \\ 1\cdot 2 + 0\cdot 0 + 0\cdot 5 & 1\cdot(-1) + 0\cdot 7 + 0\cdot(-2) \\ 0\cdot 2 + 1\cdot 0 + 0\cdot 5 & 0\cdot(-1) + 1\cdot 7 + 0\cdot(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & -1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

g) Vi har

$$\begin{aligned} B^T B &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -1 & 7 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 7 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2\cdot 2 + 0\cdot 0 + 5\cdot 5 & 2\cdot(-1) + 0\cdot 7 + 5\cdot(-2) \\ 2\cdot(-1) + 7\cdot 0 + (-2)\cdot 5 & (-1)\cdot(-1) + 7\cdot 7 + (-2)\cdot(-2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 29 & -12 \\ -12 & 54 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

h) Produkten blir

$$\begin{aligned} BB^T &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 7 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -1 & 7 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2\cdot 2 + (-1)\cdot(-1) & 2\cdot 0 + (-1)\cdot 7 & 2\cdot 5 + (-1)\cdot(-2) \\ 0\cdot 2 + 7\cdot(-1) & 0\cdot 0 + 7\cdot 7 & 0\cdot 5 + 7\cdot(-2) \\ 5\cdot 2 + (-2)\cdot(-1) & 5\cdot 0 + (-2)\cdot 7 & 5\cdot 5 + (-2)\cdot(-2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & -7 & 12 \\ -7 & 49 & -14 \\ 12 & -14 & 29 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

i) Ihopmultiplikation ger

$$\begin{aligned} FD &= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -5 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2\cdot 0 + 0\cdot 0 + 1\cdot 1 & -2\cdot 1 + 0\cdot 0 + 1\cdot 0 & -2\cdot 0 + 0\cdot 1 + 1\cdot 0 \\ -5\cdot 0 + 0\cdot 0 + 2\cdot 1 & -5\cdot 1 + 0\cdot 0 + 2\cdot 0 & -5\cdot 0 + 0\cdot 1 + 2\cdot 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -5 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

k) I detta fall blir det bara en rad gånger en kolumn,

$$c^T c = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 3 + 2\cdot 2 + 1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \end{pmatrix},$$

d.v.s. en 1×1-matris vilket man ofta brukar skriva som talet 14.

l) Raderna och kolumnerna består bara av ett element i detta fall,

$$cc^T = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 3 & 3\cdot 2 & 3\cdot 1 \\ 2\cdot 3 & 2\cdot 2 & 2\cdot 1 \\ 1\cdot 3 & 1\cdot 2 & 1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 6 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

L5.7 Låt $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ och $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. Verifiera att $(A+B)^2 = A^2+B^2 = (A-B)^2$.
Ledning: Visa först att det räcker att verifiera att $AB = -BA$.

Vi ska alltså visa de två likheterna

$$(A+B)^2 = A^2+B^2 \quad \text{och} \quad (A-B)^2 = A^2+B^2. \tag{$*$}$$

Ett sätt att göra detta är att helt enkelt stoppa in A och B, och visa att båda led i varje samband är lika, men det kan bli lite lättare om vi först förenklar alla led i $(*)$. Vi har

$$\begin{aligned}(A+B)^2 &= (A+B)(A+B) = A^2+AB+BA+B^2,\\ (A-B)^2 &= (A-B)(A-B) = A^2-AB-BA+B^2,\end{aligned}$$

vilket betyder att de två likheterna i $(*)$ blir

$$\begin{aligned}A^2+AB+BA+B^2 &= A^2+B^2 \quad \text{och}\\ A^2-AB-BA+B^2 &= A^2+B^2,\end{aligned}$$

d.v.s.

$$AB+BA=0 \quad \text{och} \quad -AB-BA=0,$$

vilket är detsamma som $AB=-BA$. Om vi alltså lyckas visa att $AB=-BA$ så är de två likheterna i $(*)$ uppfyllda. Vi har att

$$\begin{aligned}AB &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1+0\cdot 0 & 1\cdot 1+0\cdot(-1) \\ -2\cdot 1+(-1)\cdot 0 & -2\cdot 1+(-1)\cdot(-1) \end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix},\\ BA &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1+1\cdot(-2) & 1\cdot 0+1\cdot(-1) \\ 0\cdot 1+(-1)\cdot(-2) & 0\cdot 0+(-1)\cdot(-1) \end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = -AB.\end{aligned}$$

Anm. Sambanden i $(*)$ gäller givetvis inte för alla matriser utan det är bara i undantagsfall som $(*)$ är giltig.

L5.10 Ge exempel på en 2×2-matris $A \neq O$ (nollmatrisen) för vilken $A^2 = O$.

Vi skriver upp en allmän 2×2-matris

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Eftersom $A \neq O$ får vi inte välja alla a, b, c och d lika med noll. Vi vill nu att $A^2 = O$, d.v.s.

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & cb+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vi ska hitta en icke-trivial lösning till ekvationssystemet (som *inte* är linjärt)

$$\begin{cases} a^2+bc=0 \\ ab+bd=0 \\ ca+dc=0 \\ cb+d^2=0 \end{cases} \tag{$*$}$$

Eftersom vi bara är intresserade av att hitta en lösning kan vi börja och pröva oss fram. T.ex. ser vi att elementet b endast förekommer i kombinationerna ab,

bc och bd i ekvationssystemet, så om vi sätter $a = c = d = 0$ och $b = 1$ kommer alla termer i $(*)$ att vara noll, d.v.s. ekvationssystemet är uppfyllt.

Vårt svar är alltså

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Givetvis kontrollerar vi svaret

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot 0 + 1\cdot 0 & 0\cdot 1 + 1\cdot 0 \\ 0\cdot 0 + 0\cdot 0 & 0\cdot 1 + 0\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O.$$

Anm. Det finns självklart många korrekta svar på denna uppgift.

L5.13 Låt A vara

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Bestäm matrisen U så att UA är en trappstegsmatris.

Utför radoperationer som reducerar A till en trappstegsmatris T,

$$A\text{♀⇅}\cdots\text{♂} = T.$$

I vänsterledet kan vi nu se A som en produkt med enhetsmatrisen EA,

$$(EA)\text{♀⇅}\cdots\text{♂} = T, \qquad (*)$$

och använda räknereglerna

- $(BC)\text{♀} = (B\text{♀})C$
- $(BC)\text{⇅} = (B\text{⇅})C$
- $(BC)\text{◎} = (B\text{◎})C$

för att flytta radoperationerna så att de verkar på den vänstra faktorn E i $(*)$,

$$(E\text{♀⇅}\cdots\text{♂})A = T.$$

Sätter vi $U = E\text{♀⇅}\cdots\text{♂}$ så har vi alltså att $UA = T$.

Med andra ord, om vi tar de radoperationer som reducerar A till T och utför dem istället på enhetsmatrisen E så får vi den sökta matrisen U. Med ett räkneschema kan vi sammanfatta detta som

$$(A\,|\,E) \sim \cdots \sim (T\,|\,U).$$

a) Vi ställer upp räkneschemat med A i den vänstra halvan och E i den högra halvan,

$$\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{array}.$$

Nu radreducerar vi hela matrisen tills vi fått en trappstegsmatris i den vänstra halvan.

$$\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ \frac{1}{3} \end{array} \sim \quad \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ -2 \end{array} \sim$$

$$\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}$$

I den högra halvan kan vi avläsa matrisen U,

$$U = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Kontroll: $UA = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

b) Vi gör på samma sätt som i a-uppgiften,

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} -2 \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

och vi kan avläsa

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Kontroll: $UA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$

L5.16 Bestäm, i de fall de finns, inverserna till följande matriser

a) $\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 8 & 11 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

För att beräkna inversen till en matris A ställer vi upp räkneschemat $(A \,|\, E)$ och radreducerar tills den vänstra halvan blir enhetsmatrisen. Då kan vi avläsa inversen i den högra halvan, d.v.s.

$$(A \,|\, E) \sim \cdots \sim (E \,|\, A^{-1}).$$

Om det inte går att radreducera A till E (om vi får en nollrad) då saknar A invers.

a) Vi sätter igång och radreducerar,

$$\begin{array}{cc|cc} 5 & 7 & 1 & 0 \\ 8 & 11 & 0 & 1 \end{array} \;\tfrac{1}{5}\; \sim \begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{7}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 8 & 11 & 0 & 1 \end{array} \;{-8}\; \sim$$
$$\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{7}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{8}{5} & 1 \end{array} \;{-5}\; \sim \begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{7}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 8 & -5 \end{array} \;{-\tfrac{7}{5}}\; \sim$$
$$\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -11 & 7 \\ 0 & 1 & 8 & -5 \end{array}.$$

Nu kan vi avläsa inversen i den högra halvan

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 8 & 11 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -11 & 7 \\ 8 & -5 \end{pmatrix}.$$

Som en kontroll kan vi multiplicera ihop matrisen och dess invers. Vi ska då få enhetsmatrisen

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 8 & 11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -11 & 7 \\ 8 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cdot(-11)+7\cdot 8 & 5\cdot 7+7\cdot(-5) \\ 8\cdot(-11)+11\cdot 8 & 8\cdot 7+11\cdot(-5) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Vi ställer upp räkneschemat och börjar gausseliminera

$$\begin{array}{cc|cc} 5 & 10 & 1 & 0 \\ 8 & 16 & 0 & 1 \end{array} \;\tfrac{1}{5}\; \sim \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & \frac{1}{5} & 0 \\ 8 & 16 & 0 & 1 \end{array} \;{-8}\; \sim$$
$$\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{5} & 1 \end{array}.$$

Här avbryter vi radreduceringen eftersom vi fick en nollrad. Det betyder att matrisen saknar invers.

c) Räkneschemat blir något större i detta fall men metoden är densamma.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \;-\; \sim$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \;{-\tfrac{1}{2}}\; \sim$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \;-\; \sim$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Matrisens invers är alltså

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Vi kontrollerar svaret genom att multiplicera matrisen och inversen,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \cdots = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

d) Vi gör precis som tidigare,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} -4 \quad -7 \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & -7 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -2 \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right).$$

Nu fick vi en nollrad i den vänstra hälften, vilket betyder att matrisen inte är inverterbar.

L5.20 Låt $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Verifiera att $(A-E)^2 = O$. Härled ur detta att $A^{-1} = 2E - A$.

Vi visar först att $(A-E)^2 = O$,

$$A - E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(A-E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O.$$

När vi ska härleda formeln för A^{-1} måste vi hålla tungan rätt i mun. Vi får *inte* anta att A är inverterbar utan detta måste vi också visa. Det enda vi vet är att

$$(A-E)^2 = O.$$

Om vi utvecklar vänsterledet får vi

$$A^2 - 2A + E = O. \qquad (*)$$

Vi kan möblera om uttrycket så att vi får $-A^2 + 2A = E$. I vänsterledet kan vi bryta ut en gemensam faktor A,

$$(-A + 2E)A = E.$$

Om vi sätter $U = -A + 2E$ så har vi alltså visat att $UA = E$, d.v.s. U är en vänsterinvers till A och eftersom A är kvadratisk så är A inverterbar och

$$A^{-1} = U = 2E - A.$$

Anm. En felaktig lösning är att anta att A^{-1} finns och vänstermultiplicera $(*)$ med A^{-1} och få

$$A - 2E + A^{-1} = O \qquad \Leftrightarrow \qquad A^{-1} = 2E - A.$$

Slutformeln är visserligen rätt men härledningen bygger på att A^{-1} existerar vilket man inte på förhand kan veta.

L5.22 Om A och B är inverterbara matriser av samma format, förenkla så långt som möjligt:

a) $A(BA)^{-1}B$

b) $A(B^{-1}+A^{-1})B$

c) $A^{-1}(AA^T)^T$.

a) Vi börjar med att utveckla faktorn $(BA)^{-1}$ med räkneregeln för inversen av en produkt,

$$(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}.$$

Med högerledet insatt istället för vänsterledet får vi

$$A(BA)^{-1}B = AA^{-1}B^{-1}B = (AA^{-1})(BB^{-1}) = EE = E.$$

b) Faktorerna A och B kan vi multiplicera in i parentesen med den distributiva lagen

$$\begin{aligned} A(B^{-1}+A^{-1})B &= (AB^{-1}+AA^{-1})B = (AB^{-1}+E)B \\ &= (AB^{-1}B+EB) = AE+B = A+B. \end{aligned}$$

c) Det första vi gör är att förenkla den andra faktorn med transponatreglerna

$$(AA^T)^T = A^{TT}A^T = AA^T$$

och då är

$$A^{-1}(AA^T)^T = A^{-1}AA^T = (A^{-1}A)A^T = EA^T = A^T.$$

L5.23 Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. Bestäm de bägge matriserna X och Y så att

$$\begin{cases} X + 2A^{-1}Y = A^{-1}, \\ 3AX + \quad Y = E. \end{cases}$$

Från den första ekvationen kan vi lösa ut X i termer av Y,

$$X = A^{-1} - 2A^{-1}Y = A^{-1}(E-2Y),$$

och stoppa in i den andra ekvationen

$$\begin{aligned} &3A\cdot A^{-1}(E-2Y)+Y=E \quad\Leftrightarrow\quad 3E(E-2Y)+Y=E \\ \Leftrightarrow\quad &3E-6Y+Y=E \quad\Leftrightarrow\quad 5Y=2E \quad\Leftrightarrow\quad Y=\tfrac{2}{5}E. \end{aligned}$$

Använder vi nu formeln för X uttryckt i Y så fås

$$X = A^{-1}(E-2Y) = A^{-1}(E-\tfrac{4}{5}E) = \tfrac{1}{5}A^{-1}E = \tfrac{1}{5}A^{-1}.$$

Svaret är alltså

$$\begin{cases} X = \tfrac{1}{5}A^{-1} \\ Y = \tfrac{2}{5}E \end{cases}$$

Vi kontrollerar svaret

$$\begin{aligned} X+2A^{-1}Y &= \tfrac{1}{5}A^{-1} + 2A^{-1}\tfrac{2}{5}E = \left(\tfrac{1}{5}+\tfrac{4}{5}\right)A^{-1} = A^{-1}, \\ 3AX+Y &= 3A\,\tfrac{1}{5}A^{-1} + \tfrac{2}{5}E = \tfrac{3}{5}E + \tfrac{2}{5}E = E. \end{aligned}$$

Med siffror får vi

$$\begin{cases} X = \frac{1}{5}\cdot\dfrac{1}{1\cdot 5 - 3\cdot 2}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}, \\ Y = \frac{2}{5}E = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}. \end{cases}$$