Institutionen för matematik
KTH

Version gul

Kontrollskrivning 1, 2002-10-31, kl. $13^{15}-14^{00}$.

5B1116 Matematik 2, för ME.

Inga hjälpmedel!

Varje uppgift ger maximalt 3 poäng. För godkänt krävs 5 poäng.

1. Beräkna determinanten $\begin{vmatrix} 9 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 1 & 7 \end{vmatrix}$.

2. Beräkna inversen av matrisen $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & -5 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

3. För vilka värden på parametern a har ekvationssystemet

$$\begin{cases} ax + y = 3 \\ x + ay + z = 2 \\ -x - y + z = 1 \end{cases}$$

exakt en lösning?

Institutionen för matematik
KTH

Version rosa

Kontrollskrivning 1, 2002-10-31, kl. $13^{15} - 14^{00}$.
5B1116 Matematik 2, för ME.

Inga hjälpmedel!
Varje uppgift ger maximalt 3 poäng. För godkänt krävs 5 poäng.

1. Beräkna determinanten $\begin{vmatrix} 7 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 9 & 8 & 3 \\ 2 & 6 & 1 & -2 \end{vmatrix}$.

2. Beräkna inversen av matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

3. För vilka värden på parametern a har ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y + az = 1 \\ x - z = 3 \\ x + ay + z = 2 \end{cases}$$

exakt en lösning?

Lösningsförslag, Kontrollskrivning 1 (version gul), Matematik 2, ME, 2002-10-31.

1. Subtrahera två gånger den andra raden från den tredje raden. Detta ger en rad med många nollor som vi kofaktorutvecklar längs,

$$\begin{vmatrix} 9 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 3 & 6 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 7 \cdot \begin{vmatrix} 9 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 7 \end{vmatrix}.$$

I denna determinant subtraherar vi tre gånger andra raden från den tredje raden och får en rad som vi kofaktorutvecklar längs

$$= 7 \cdot \begin{vmatrix} 9 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 7 \cdot \begin{vmatrix} 9 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 7 \cdot (-5) \cdot \begin{vmatrix} 9 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 7 \cdot (-5) \cdot 18 = -630.$$

Rosa svar: -420 .

2. Vi ställer upp räkneschemat $(A\,|\,E)$ och radreducerar tills den vänstra halvan blir E . I den högra halvan kan vi då avläsa A^{-1} ,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Inversen är alltså $\begin{pmatrix} -1 & -3 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Rosa svar: $\begin{pmatrix} -1 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Det linjära ekvationssystemet har exakt en lösning om och endast om koefficientmatrisen är inverterbar, d.v.s. om och endast om determinanten är skilt från noll

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \{\,\text{Sarrus regel}\,\} = a^2 + a - 2 \neq 0.$$

Med andra ord ska a inte vara en rot till polynomet a^2+a-2, vilket ger att $a \neq -2$ och $a \neq 1$.

Rosa svar: $a \neq -2$ och $a \neq 1$.