Institutionen för matematik
KTH

Version gul

Kontrollskrivning 2, 2002-11-07, kl. $13^{15} - 14^{00}$.

5B1116 Matematik 2, för ME.

Inga hjälpmedel!

Varje uppgift ger maximalt 3 poäng. För godkänt krävs 5 poäng.

1. En triangel i rummet har hörnen i punkterna $P = (-1, 2, 1)$, $Q = (5, 2, 3)$ och $R = (2, 1, -1)$. Visa att triangeln är rätvinklig.

2. Bestäm linjen som går genom punkten $P = (2, 6, -1)$ och mittpunkten mellan punkterna $Q = (3, 2, 1)$ och $R = (5, -2, 3)$.

3. Bestäm ekvationen för det plan som går genom punkten $P = (2, 3, 0)$ och innehåller linjen $(x, y, z) = (1 - t, 2 - t, 3 + t)$.

Institutionen för matematik
KTH

Version rosa

Kontrollskrivning 2, 2002-11-07, kl. $13^{15} - 14^{00}$.

5B1116 Matematik 2, för ME.

Inga hjälpmedel!

Varje uppgift ger maximalt 3 poäng. För godkänt krävs 5 poäng.

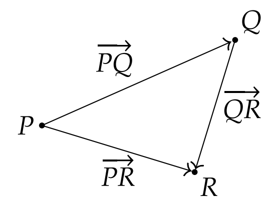
1. En triangel i rummet har hörnen i punkterna $P = (2,1,2)$, $Q = (2,5,3)$ och $R = (3,2,1)$. Visa att triangeln är rätvinklig.

2. Bestäm linjen som går genom punkten $P = (-1,3,4)$ och mittpunkten mellan punkterna $Q = (4,1,4)$ och $R = (0,5,2)$.

3. Bestäm ekvationen för det plan som går genom punkten $P = (1,0,4)$ och innehåller linjen $(x,y,z) = (3+t, 1+t, 5+t)$.

1. Vektorerna som representerar sidorna i triangeln är

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (5-(-1), 2-2, 3-1) = (6,0,2)$$
$$\overrightarrow{PR} = R - P = (2-(-1), 1-2, -1-1) = (3,-1,-2)$$
$$\overrightarrow{QR} = R - Q = (2-5, 1-2, -1-3) = (-3,-1,-4)$$



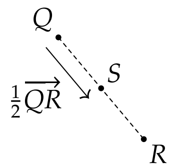
Vinkeln i ett hörn är rät om skalärprodukten mellan kantvektorerna som möts i hörnet är noll,

- $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} = 6 \cdot 3 + 0 \cdot (-1) + 2 \cdot (-2) = 14 \neq 0$ (vinkeln vid P)
- $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{QR} = 6 \cdot (-3) + 0 \cdot (-1) + 2 \cdot (-4) = -26 \neq 0$ (vinkeln vid Q)
- $\overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{QR} = 3 \cdot (-3) + (-1) \cdot (-1) + (-2) \cdot (-4) = 0$ (vinkeln vid R)

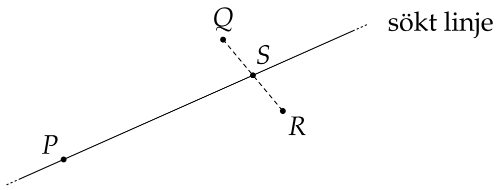
Alltså är vinkeln vid hörnet R rät.

2. Vi kallar mittpunkten mellan Q och R för S. Punkten S kan vi bestämma genom att utifrån Q gå halvvägs till R

$$\begin{aligned} S &= Q + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{QR} = (3,2,1) + \tfrac{1}{2}(5-3, -2-2, 3-1) \\ &= (3,2,1) + (1,-2,1) = (4,0,2). \end{aligned}$$



Den sökta linjen innehåller P och S,



och är därför parallell med vektorn

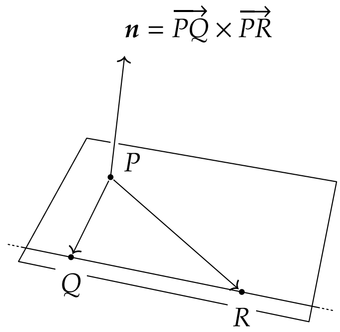
$$\overrightarrow{PS} = S - P = (4-2, 0-6, 2-(-1)) = (2,-6,3).$$

En parametrisering av linjen är $P + t\,\overrightarrow{PS} = (2,6,-1) + t\,(2,-6,3)$.

Rosa svar: $(-1,3,4) + t\,(3,0,-1)$.

3. Tag två punkter Q och R på linjen, t.ex.

$$Q = (1, 2, 3) \quad (\text{svarar mot } t = 0)$$
$$R = (0, 1, 4) \quad (\text{svarar mot } t = 1)$$



Vektorerna $\overrightarrow{PQ}$ och $\overrightarrow{PR}$ är parallella med planet.
Vektorn $\boldsymbol{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$ är därmed en normal till planet.

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (1-2, 2-3, 3-0) = (-1, -1, 3)$$
$$\overrightarrow{PR} = R - P = (0-2, 1-3, 4-0) = (-2, -2, 4)$$
$$\boldsymbol{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = (-1, -1, 3) \times (-2, -2, 4) = (2, -2, 0)$$

Nu har vi en punkt i planet och en normal till planet. Planets ekvation blir

$$(2, -2, 0) \cdot ((x, y, z) - (2, 3, 0)) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2(x-2) - 2(y-3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x - 2y + 2 = 0.$$

Rosa svar: $-y + z = 4$.