Institutionen för matematik
KTH

Version gul

Kontrollskrivning 3, 2002-11-14, kl. $13^{15} - 14^{00}$.

5B1116 Matematik 2, för ME.

Inga hjälpmedel!

Varje uppgift ger maximalt 3 poäng. För godkänt krävs 5 poäng.

1. Bestäm matrisen för den linjära avbildning i planet som ges av en projektion på linje $y = 3x$.

2. Bestäm definitionsmängden till funktionen $f(x,y) = \sqrt{1 - \log(x+y)}$.

3. Sök gränsvärdet $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{x - 2y}{xy^2 + x - 2y^3 - 2y}$.

Institutionen för matematik
KTH

Version rosa

Kontrollskrivning 3, 2002-11-14, kl. $13^{15} - 14^{00}$.

5B1116 Matematik 2, för ME.

Inga hjälpmedel!

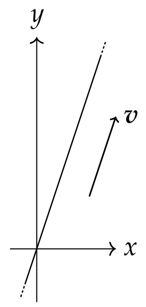
Varje uppgift ger maximalt 3 poäng. För godkänt krävs 5 poäng.

1. Bestäm matrisen för den linjära avbildning i planet som ges av en projektion på linje $y = -3x$.

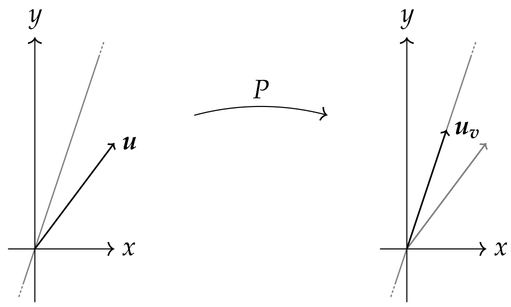
2. Bestäm definitionsmängden till funktionen $f(x, y) = \sqrt{1 - \log(x - y)}$.

3. Sök gränsvärdet $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,-1)} \frac{x + 2y}{x^3 + x - 2x^2y + 2y}$.

1. Linjen $y = 3x$ kan vi också skriva som $(x, y) = (t, 3t) = t\,(1, 3)$ varifrån vi kan avläsa att $\boldsymbol{v} = (1, 3)$ är linjens riktning.



Projektionsavbildningen avbildar en vektor $\boldsymbol{u}$ på dess komposant $\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{v}}$ i $\boldsymbol{v}$-riktningen.



Avbildningen är alltså

$$P(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}_{\boldsymbol{v}} = (\boldsymbol{u} \cdot \hat{\boldsymbol{v}})\,\hat{\boldsymbol{v}} = \Big(\boldsymbol{u} \cdot \frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}\Big)\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|} = \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|^2}\,\boldsymbol{v} = \frac{(u_1, u_2) \cdot (1, 3)}{1^2 + 3^2}\,(1, 3)$$
$$= \frac{u_1 + 3u_2}{10}\,(1, 3) = \big(\tfrac{1}{10}u_1 + \tfrac{3}{10}u_2,\ \tfrac{3}{10}u_1 + \tfrac{9}{10}u_2\big).$$

Den projicerade vektorn kan vi skriva som

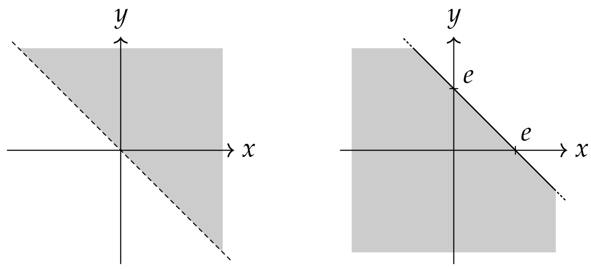
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{10}u_1 + \frac{3}{10}u_2 \\ \frac{3}{10}u_1 + \frac{9}{10}u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{9}{10} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

och ser att projektionsmatrisen är $\begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{9}{10} \end{pmatrix}$.

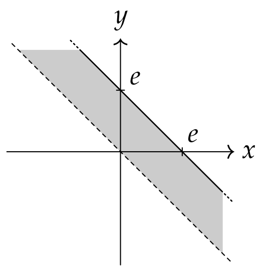
Rosa svar: $\begin{pmatrix} \frac{1}{10} & -\frac{3}{10} \\ -\frac{3}{10} & \frac{9}{10} \end{pmatrix}$.

2. Funktionsuttrycket $\sqrt{1-\log(x+y)}$ är definierat när

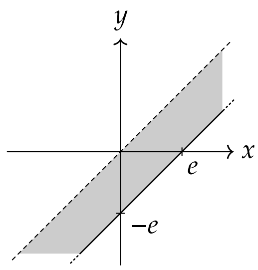
- argumentet till log är positivt, d.v.s. $x+y>0 \quad\Leftrightarrow\quad y>-x\,.$
- argumentet till $\sqrt{}$ är icke-negativt, d.v.s. $1-\log(x+y)\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad \log(x+y)\leq 1 \quad\Leftrightarrow\quad x+y\leq e \quad\Leftrightarrow\quad y\leq e-x\,.$



Tillsammans begränsar dessa villkor funktionens definitionsmängd till följande remsa



Rosa svar:



3. Med en polynomdivision kan vi förenkla kvoten

$$
\begin{array}{r|l}
y^2 + \quad 1 & \\
\hline
xy^2 - 2y^3 + x - 2y & x-2y \\
\underline{xy^2 - 2y^3} \qquad\quad & \\
0 \;+ x - 2y & \\
\underline{x - 2y} & \\
0 &
\end{array}
$$

Alltså är $\dfrac{x-2y}{xy^2+x-2y^3-2y} = \dfrac{1}{y^2+1}$ och gränsvärdet blir

$$\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{x-2y}{xy^2+x-2y^3-2y} = \lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{1}{y^2+1} = \frac{1}{2}.$$

Rosa svar: $\frac{1}{2}$