Institutionen för matematik
KTH

Version gul

Kontrollskrivning 4, 2002-11-21, kl. $13^{15} - 14^{00}$.

5B1116 Matematik 2, för ME.

Inga hjälpmedel!

Varje uppgift ger maximalt 3 poäng. För godkänt krävs 5 poäng.

1. Beräkna första ordningens partialderivator av

$$f(x,y) = y \log(x^2 + y^2) + 2x \arctan\frac{y}{x} \qquad \text{där } x \neq 0$$

   och förenkla uttrycken så långt som möjligt.

2. Beräkna riktningsderivatan av $f(x,y,z) = x^2 \ln y + xz$ i punkten $(3,1,-3)$ och i samma riktning som $v = (2,2,1)$.

3. Har funktionen

$$\boldsymbol{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 - 2y + z \\ y^2 - z \\ x + y - z^2 \end{pmatrix}$$

   en lokal differentierbar invers kring punkten $(x,y,z) = (1,1,2)$?

Institutionen för matematik
KTH

Version rosa

Kontrollskrivning 4, 2002-11-21, kl. $13^{15} - 14^{00}$.

5B1116 Matematik 2, för ME.

Inga hjälpmedel!

Varje uppgift ger maximalt 3 poäng. För godkänt krävs 5 poäng.

1. Beräkna första ordningens partialderivator av

$$f(x, y) = x \log(x^2 + y^2) + 2y \arctan \frac{x}{y} \qquad \text{där } y \neq 0$$

och förenkla uttrycken så långt som möjligt.

2. Beräkna riktningsderivatan av $f(x, y, z) = z^2 \ln x + yz$ i punkten $(1, 3, -3)$ och i samma riktning som $v = (1, 2, 2)$.

3. Har funktionen

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2 + 2y - z \\ y^2 + z \\ x - y + z^2 \end{pmatrix}$$

en lokal differentierbar invers kring punkten $(x, y, z) = (2, 1, 1)$?

1. Vi deriverar och förenklar,

$$\begin{aligned}
f'_x &= \frac{\partial}{\partial x}\Big(y\log(x^2+y^2)\Big) + \frac{\partial}{\partial x}\Big(2x\arctan\frac{y}{x}\Big)\\
&= y\,\frac{1}{x^2+y^2}\,\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2) + 2\cdot\arctan\frac{y}{x} + 2x\,\frac{\partial}{\partial x}\arctan\frac{y}{x}\\
&= \frac{2xy}{x^2+y^2} + 2\arctan\frac{y}{x} + 2x\cdot\frac{1}{1+\big(\frac{y}{x}\big)^2}\,\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{y}{x}\Big)\\
&= \frac{2xy}{x^2+y^2} + 2\arctan\frac{y}{x} + \frac{2x}{1+y^2/x^2}\cdot\Big(-\frac{y}{x^2}\Big) = \frac{2xy}{x^2+y^2} + 2\arctan\frac{y}{x} - \frac{2xy}{x^2(1+y^2/x^2)}\\
&= \frac{2xy}{x^2+y^2} + 2\arctan\frac{y}{x} - \frac{2xy}{x^2+y^2} = 2\arctan\frac{y}{x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f'_y &= \frac{\partial}{\partial y}\Big(y\log(x^2+y^2)\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(2x\arctan\frac{y}{x}\Big)\\
&= 1\cdot\log(x^2+y^2) + y\cdot\frac{\partial}{\partial y}\Big(\log(x^2+y^2)\Big) + 2x\cdot\frac{1}{1+\big(\frac{y}{x}\big)^2}\,\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{y}{x}\Big)\\
&= \log(x^2+y^2) + y\cdot\frac{1}{x^2+y^2}\,\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2) + \frac{2x}{1+y^2/x^2}\cdot\frac{1}{x}\\
&= \log(x^2+y^2) + \frac{y}{x^2+y^2}\cdot 2y + \frac{2}{1+y^2/x^2} = \log(x^2+y^2) + \frac{2y^2}{x^2+y^2} + \frac{2x^2}{x^2(1+y^2/x^2)}\\
&= \log(x^2+y^2) + \frac{2y^2}{x^2+y^2} + \frac{2x^2}{x^2+y^2} = \log(x^2+y^2) + \frac{2(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \log(x^2+y^2)+2.
\end{aligned}$$

Rosa svar: $f'_x = \log(x^2+y^2)+2$ och $f'_y = 2\arctan\dfrac{x}{y}$

2. Riktningsderivatan av den differentierbara funktionen f i punkten $(3,1,-3)$ och i riktningen $\hat{v}$ kan vi beräkna med formeln

$$f'_{\hat{v}}(3,1,-3) = \nabla f(3,1,-3)\cdot\hat{v}.$$

Gradienten av f är lika med

$$\nabla f = (f'_x, f'_y, f'_z) = \Big(\,2x\ln y + z,\ \frac{x^2}{y},\ x\,\Big)$$

vilket ger att $\nabla f(3,1,-3) = (-3,9,3)$. För att få enhetsvektorn $\hat{v}$ i samma riktning som v normerar vi v,

$$\hat{v} = \frac{v}{|v|} = \frac{(2,2,1)}{|(2,2,1)|} = \frac{(2,2,1)}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}} = \frac{(2,2,1)}{3} = (\tfrac{2}{3},\tfrac{2}{3},\tfrac{1}{3}).$$

Den sökta riktningsderivatan är

$$f'_{\hat{v}}(3,1,-3) = \nabla f(3,1,-3)\cdot\hat{v} = (-3,9,3)\cdot(\tfrac{2}{3},\tfrac{2}{3},\tfrac{1}{3}) = -2+6+1 = 5.$$

Rosa svar: 3.

3. Funktionen $\boldsymbol{f}$ har en lokal differentierbar invers kring $\boldsymbol{p} = (1,1,2)$ om och endast om linjariseringen av $\boldsymbol{f}$ i samma punkt

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{h}) = \underbrace{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{p}) + \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{p})\,\boldsymbol{h}}_{\text{linjarisering}} + O(|\boldsymbol{h}|)^2$$

har en invers, d.v.s. att jakobianen

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(x^2-2y+z) & \frac{\partial}{\partial y}(x^2-2y+z) & \frac{\partial}{\partial z}(x^2-2y+z) \\ \frac{\partial}{\partial x}(y^2-z) & \frac{\partial}{\partial y}(y^2-z) & \frac{\partial}{\partial z}(y^2-z) \\ \frac{\partial}{\partial x}(x+y-z^2) & \frac{\partial}{\partial y}(x+y-z^2) & \frac{\partial}{\partial z}(x+y-z^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & -2 & 1 \\ 0 & 2y & -1 \\ 1 & 1 & -2z \end{pmatrix}$$

är inverterbar i $\boldsymbol{p} = (1,1,2)$. Detta kan vi avgöra genom att räkna ut determinanten av jakobianen i punkten $\boldsymbol{p}$,

$$\det\Bigl(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{p})\Bigr) = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -14 \neq 0.$$

Eftersom determinanten är nollskild är jakobianen inverterbar och $\boldsymbol{f}$ har en lokal differentierbar invers kring $\boldsymbol{p} = (1,1,2)$.

Rosa svar: Ja.