Institutionen för matematik
KTH

Version gul

Kontrollskrivning 5, 2002-11-28, kl. $13^{15}-14^{00}$.

5B1116 Matematik 2, för ME.

Inga hjälpmedel!

Varje uppgift ger maximalt 3 poäng. För godkänt krävs 5 poäng.

1. Givet vektorerna $\boldsymbol{u}_1 = (1,1,3)$, $\boldsymbol{u}_2 = (2,1,3)$ och $\boldsymbol{u}_3 = (1,0,1)$.
   a) Visa att $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ och $\boldsymbol{u}_3$ är en bas för rummet.
   b) Skriv vektorn $\boldsymbol{v} = (1,1,6)$ som en linjärkombination av $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ och $\boldsymbol{u}_3$.

2. Bestäm normallinjen till ytan $x^2 + x - 6y + xz^3 = 2$ i punkten $(x,y,z) = (2,1,1)$ och visa att normallinjen även innehåller punkten $(-1,4,-2)$. (Normallinjen $=$ den linje som innehåller punkten $(2,1,1)$ och är vinkelrät mot ytan i samma punkt.)

3. Transformera uttrycket $z''_{xx} + 3z''_{xy} + 2z''_{yy}$ med variabelbytet $u = 2x - y$, $v = x - y$.

Institutionen för matematik
KTH

Version rosa

Kontrollskrivning 5, 2002-11-28, kl. $13^{15} - 14^{00}$.

5B1116 Matematik 2, för ME.

Inga hjälpmedel!

Varje uppgift ger maximalt 3 poäng. För godkänt krävs 5 poäng.

1. Givet vektorerna $\boldsymbol{u}_1 = (1, 2, 3)$, $\boldsymbol{u}_2 = (1, 1, 2)$ och $\boldsymbol{u}_3 = (1, 0, 2)$.
   a) Visa att $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ och $\boldsymbol{u}_3$ är en bas för rummet.
   b) Skriv vektorn $\boldsymbol{v} = (2, 5, 5)$ som en linjärkombination av $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ och $\boldsymbol{u}_3$.

2. Bestäm normallinjen till ytan $x^2 - 2x + 3y + xz^3 + 3 = 0$ i punkten $(x, y, z) = (3, -1, -1)$ och visa att normallinjen även innehåller punkten $(2, -2, -4)$. (Normallinjen = den linje som innehåller punkten $(3, -1, -1)$ och är vinkelrät mot ytan i samma punkt.)

3. Transformera uttrycket $z''_{xx} - 2z''_{xy} + z''_{yy}$ med variabelbytet $u = x - 2y$, $v = x + y$.

1. a) Vektorerna $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ och $\boldsymbol{u}_3$ är en bas om determinanten som har vektorerna som kolumner är nollskild. Vi har att

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

b) Vektorn $\boldsymbol{v}$ är en linjärkombination av $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ och $\boldsymbol{u}_3$ om det finns skalärer k_1 , k_2 och k_3 så att

$$\boldsymbol{v} = k_1\boldsymbol{u}_1 + k_2\boldsymbol{u}_2 + k_3\boldsymbol{u}_3.$$

Detta samband kan skrivas som

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

vilket ger det linjära ekvationssystemet

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

och löser vi detta system fås att $k_1 = 4$, $k_2 = -3$ och $k_3 = 3$. Alltså är $\boldsymbol{v} = 4\boldsymbol{u}_1 - 3\boldsymbol{u}_2 + 3\boldsymbol{u}_3$.

Rosa svar: $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}_1 + 3\boldsymbol{u}_2 - 2\boldsymbol{u}_3$.

2. Som en punkt på normallinjen väljer vi $P = (2, 1, 1)$ och eftersom linjen ska vara vinkelrät mot ytan $f(x, y, z) = x^2 + x - 6y + xz^3 = 0$ i denna punkt har den en riktning som är parallell med ytans normal

$$\nabla f(P) = (f'_x(P), f'_y(P), f'_z(P)) = (2x + 1 + z^3, -6, 3xz^2)\Big|_{\substack{x=2\\y=1\\z=1}} = (6, -6, 6).$$

En parametrisering av normallinjen är alltså $(x, y, z) = (2, 1, 1) + t\,(6, -6, 6)$.

Punkten $(-1, 4, -2)$ ligger på normallinjen om det finns ett parametervärde $t = t_0$ så att

$$(2, 1, 1) + t_0\,(6, -6, 6) = (-1, 4, -2).$$

Detta ger att

$$\left.\begin{aligned} 2 + 6t_0 &= -1 \\ 1 - 6t_0 &= 4 \\ 1 + 6t_0 &= -2 \end{aligned}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad t_0 = -\tfrac{1}{2}.$$

Rosa svar: $(x, y, z) = (3, -1, -1) + t\,(3, 3, 9)$.

3. Med kedjeregeln får vi

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = 2z'_u + z'_v \qquad \text{och} \qquad z'_y = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = -z'_u - z'_v$$

vilket betyder att sambandet mellan derivering i x, y och u, v är

$$\frac{\partial}{\partial x} = 2\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} \qquad \text{och} \qquad \frac{\partial}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v}.$$

För att uttrycka z''_{xx}, z''_{xy} och z''_{yy} i u och v använder vi dessa operatorformler

$$\begin{aligned}
z''_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} z = \left(2\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\right)\left(2\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\right) z = \left(2\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\right)\left(2z'_u + z'_v\right) \\
&= 4z''_{uu} + 2z''_{vu} + 2z''_{uv} + z''_{vv} = \{ z''_{uv} = z''_{vu} \} = 4z''_{uu} + 4z''_{uv} + z''_{vv}, \\
z''_{xy} &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} z = \left(-\frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v}\right)\left(2\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\right) z = \left(-\frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v}\right)\left(2z'_u + z'_v\right) \\
&= -2z''_{uu} - z''_{vu} - 2z''_{uv} - z''_{vv} = \{ z''_{uv} = z''_{vu} \} = -2z''_{uu} - 3z''_{uv} - z''_{vv} \\
z''_{yy} &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y} z = \left(-\frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v}\right)\left(-\frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v}\right) z = \left(-\frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v}\right)\left(-z'_u - z'_v\right) \\
&= z''_{uu} + z''_{vu} + z''_{uv} + z''_{vv} = \{ z''_{uv} = z''_{vu} \} = z''_{uu} + 2z''_{uv} + z''_{vv}
\end{aligned}$$

Svaret blir

$$z''_{xx} + 3z''_{xy} + 2z''_{yy} = (4 - 6 + 2)z''_{uu} + (4 - 9 + 4)z''_{uv} + (1 - 3 + 2)z''_{vv} = -z''_{uv}.$$

Rosa svar: $9z''_{uu}$.