Institutionen för matematik
KTH

Version gul

Kontrollskrivning 6, 2002-12-05, kl. $13^{15}-14^{00}$.

5B1116 Matematik 2, för ME.

Inga hjälpmedel!

Varje uppgift ger maximalt 3 poäng. För godkänt krävs 5 poäng.

1. Matrisen
$$A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 4 \\ -2 & 1 & 2 \\ -4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$
har egenvärdena -1, 1 och 3. Bestäm egenvektorerna som hör till egenvärdet -1 respektive egenvärdet 3.

2. Diagonalisera matrisen $A = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$.

3. Transformera uttrycket $z'_x + z'_y$ med variabelbytet $u = 1/x$, $v = 1/y - 1/x$. (Svaret får inte innehålla x eller y.)

Institutionen för matematik
KTH

Version rosa

Kontrollskrivning 6, 2002-12-05, kl. $13^{15} - 14^{00}$.

5B1116 Matematik 2, för ME.

Inga hjälpmedel!

Varje uppgift ger maximalt 3 poäng. För godkänt krävs 5 poäng.

1. Matrisen
$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ -4 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$
har egenvärdena -2, -1 och 1. Bestäm egenvektorerna som hör till egenvärdet -2 respektive egenvärdet 1.

2. Diagonalisera matrisen $A = \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$.

3. Transformera uttrycket $z'_x + z'_y$ med variabelbytet $u = 1/y$, $v = 1/x - 1/y$. (Svaret får inte innehålla x eller y.)

Lösningsförslag, Kontrollskrivning 6 (version gul), Matematik 2, ME, 2002-12-05.

1. Egenvektorerna som hör till egenvärdet λ är lösningar till ekvationssystemet

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \quad \Leftrightarrow \quad (A - \lambda E)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}.$$

Vi löser detta system för egenvärdena -1 och 3.

$\lambda = -1:$ Gausseliminering av $(A + E)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ ger

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -4 & 4 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 0 \\ -4 & 4 & 4 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ -2 \quad -\tfrac{1}{2} \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ -\tfrac{1}{4} \quad -\tfrac{1}{4} \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Från slutschemat avläser vi att egenvektorerna är $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) = (2t, t, t) = t\,(2, 1, 1)$.

$\lambda = 3:$ Gausseliminering av $(A - 3E)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ ger

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -4 & 4 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 0 \\ -4 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} -\tfrac{1}{2} \quad - \quad -\tfrac{1}{4} \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -4 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ \tfrac{1}{8} \end{matrix} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ - \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Från slutschemat avläser vi att egenvektorerna är $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) = (\frac{1}{2}t, \frac{1}{2}t, t) = t\,(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$.

Rosa svar: $\boldsymbol{x} = t\,(2, 2, 1)$ respektive $\boldsymbol{x} = t\,(\frac{1}{2}, 1, 1)$.

2. För att diagonalisera A bestämmer vi egenvärden och egenvektorer.

Egenvärdena ges av den karakteristiska ekvationen

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 6 - \lambda & 4 \\ -3 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 2 \quad \text{eller} \quad \lambda = 3.$$

Egenvektorerna får vi genom att lösa systemet $(A - \lambda E)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

$\lambda = 2:$ Med gausseliminering fås

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 4 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \tfrac{3}{4} \quad \tfrac{1}{4} \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

vilket betyder att $\boldsymbol{p}_1 = (-1, 1)$ är en egenvektor.

$\lambda = 3$: Med gausseliminering fås

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 0 \\ -3 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

vilket betyder att $\boldsymbol{p}_2 = (4, -3)$ är en egenvektor.

En egenvektorbas är alltså $\{\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2\}$ och basbytesmatrisen blir

$$P = P_{E \leftarrow X} = \begin{pmatrix} | & | \\ \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Diagonaliseringen blir därmed

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Rosa svar: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$

3. Sambandet mellan z uttryckt i x och y, och z uttryckt i u och v är

$$z(x, y) = z(u(x, y), v(x, y)).$$

Deriverar vi båda led med avseende på x och y med kedjeregeln fås

$$\begin{aligned} z'_x &= z'_u\, u'_x + z'_v\, v'_x = z'_u \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) + z'_v \cdot \frac{1}{x^2} = -z'_u \cdot u^2 + z'_v \cdot u^2, \\ z'_y &= z'_u\, u'_y + z'_v\, v'_y = z'_u \cdot 0 + z'_v \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right) = \{\, 1/y = v + 1/x = v + u \,\} = -z'_v \cdot (u + v)^2. \end{aligned}$$

Detta ger att $z'_x + z'_y = -u^2\, z'_u + \left[u^2 - (u + v)^2\right] z'_v = -u^2\, z'_u - (2uv + v^2)\, z'_v$.

Rosa svar: $z'_x + z'_y = -u^2\, z'_u - (2uv + v^2)\, z'_v$