1. Vi ställer upp det linjära ekvationssystemet i ett räkneschema och gausseliminerar.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 1 & 9 \end{array}\right)\begin{matrix} -3 \;\; -2 \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 5 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ \frac{1}{3} \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 5 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ + \;\; -4 \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} & 5 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ \\ \frac{3}{5} \end{matrix} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ \\ \frac{2}{3} \;\; -\frac{1}{3} \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Från slutschemat kan vi avläsa att systemet har en lösning $x = 1$, $y = 2$ och $z = 3$.

2. Eftersom funktionen f är ett polynom är den differentierbar och då kan riktningsderivatan beräknas med formeln $f'_{\hat{v}}(1, 1, -1) = \nabla f(1, 1, -1) \cdot \hat{v}$. Gradienten $\nabla f = (f'_x, f'_y, f'_z)$ ges i punkten $(1, 1, -1)$ av

$$\nabla f(1, 1, -1) = (2z, -2y, 2x)\Big|_{\substack{x=1\\y=1\\z=-1}} = (-2, -2, 2).$$

Derivatan ska beräknas i riktningen från punkten $(1, 1, -1)$ mot punkten $(3, -2, 5)$ vilket betyder att enhetsvektorn $\hat{v}$ pekar i samma riktning som vektorn

$$v = (3, -2, 5) - (1, 1, -1) = (3 - 1, -2 - 1, 5 - (-1)) = (2, -3, 6).$$

Enhetsvektorn $\hat{v}$ får vi genom att normera vektorn v ,

$$\hat{v} = \frac{v}{|v|} = \frac{(2, -3, 6)}{|(2, -3, 6)|} = \frac{(2, -3, 6)}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2}} = \frac{(2, -3, 6)}{\sqrt{49}} = \frac{(2, -3, 6)}{7} = (\tfrac{2}{7}, -\tfrac{3}{7}, \tfrac{6}{7}).$$

Den sökta riktningsderivatan är

$$f'_{\hat{v}}(1, 1, -1) = \nabla f(1, 1, -1) \cdot \hat{v} = (-2, -2, 2) \cdot (\tfrac{2}{7}, -\tfrac{3}{7}, \tfrac{6}{7}) = -\tfrac{4}{7} + \tfrac{6}{7} + \tfrac{12}{7} = 2.$$

3. a) Skärningspunkten $P = (x_0, y_0, z_0)$ ligger på linjen. Det finns alltså ett parametervärde $t = t_0$ så att linjens parametrisering ger punkten P ,

$$(x_0, y_0, z_0) = (1, -2, 1) + t_0\,(-1, 3, 0).$$

Skärningspunkten ska också ligga på planet, d.v.s. uppfylla planets ekvation

$$x_0 + y_0 + 3z_0 = 6.$$

Skärningspunktens parameteruttryck insatt i planets ekvation ger

$$(1 - t_0) + (-2 + 3t_0) + 3 \cdot 1 = 6 \quad\Leftrightarrow\quad 2 + 2t_0 = 6 \quad\Leftrightarrow\quad t_0 = 2.$$

och det betyder att skärningspunkten är $P = (-1, 4, 1)$.

b) För att bestämma den sökta linjen behöver vi en punkt på linjen och en vektor som är parallell med linjen. Som punkt på linjen väljer vi skärningspunkten $P = (-1, 4, 1)$. Vår linje ska vara vinkelrät mot planet $x + y + 3z = 6$ och är därför parallell med planets normalvektor $\boldsymbol{n} = (1, 1, 3)$ vars komponenter vi direkt kan avläsa från koefficienterna framför x, y och z i planets ekvation.
Den sökta linjen har därför parameterformen $(-1, 4, 1) + s\,(1, 1, 3)$.

4. Se övning 8.1d i *Analytiska metoder II*.

5. Ekvationen kan skrivas som

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2.$$

När vi transformerar ekvationen till huvudaxelform gör vi ett byte av koordinatsystem till ett system där egenvektorerna till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$$

väljs som nya koordinataxelriktningar. Ekvationen övergår då till

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 2. \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1 (x')^2 + \lambda_2 (y')^2 = 2,$$

där λ_1 och λ_2 är egenvärdena till matrisen A, och x', y' betecknar koordinater i det nya koordinatsystemet.

Egenvärdena ges av den karakteristiska ekvationen

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 9-\lambda & 3 \\ 3 & 9-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 18\lambda + 72 = 0$$

som har rötterna $\lambda_1 = 6$ och $\lambda_2 = 12$. Ekvationens huvudaxelform är därför

$$6(x')^2 + 12(y')^2 = 2 \qquad \Leftrightarrow \qquad \left(\frac{x'}{1/\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{y'}{1/\sqrt{6}}\right)^2 = 1.$$

Detta motsvarar en ellips med halvaxlar $1/\sqrt{3}$ och $1/\sqrt{6}$.

Ellipsens huvudaxlar har samma riktningar som de nya koordinataxlarna, d.v.s. samma riktningar som egenvektorerna till matrisen A. Egenvektorerna får vi genom att lösa egenvektorekvationen för varje egenvärde.

$\lambda = 6$: Egenvektorerna uppfyller $A\boldsymbol{u} = 6\boldsymbol{u}$, d.v.s. $(A - 6E)\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$. Detta system löser vi med gausseliminering

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} - \;\; \tfrac{1}{3} \\ \hphantom{x} \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Lösningarna avläser vi till $\boldsymbol{u} = (t, -t) = t\,(1, -1)$ (t parameter).

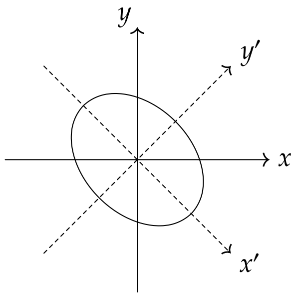
$\lambda = 12$: Egenvektorerna uppfyller $A\boldsymbol{u} = 12\boldsymbol{u}$, d.v.s. $(A - 12E)\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$. Detta system löser vi med gausseliminering

$$\left(\begin{array}{cc|c} -3 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} + \;\; -\tfrac{1}{3} \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Lösningarna avläser vi till $\boldsymbol{u} = (t, t) = t\,(1, 1)$ (t parameter).

Huvudaxlarnas riktningar är alltså $(1, -1)$ och $(1, 1)$.

Om vi sammanfattar så motsvarar ekvationen en ellips med halvaxlar $1/\sqrt{3}$ och $1/\sqrt{6}$, och där huvudaxlarna har riktningar $(1, -1)$ och $(1, 1)$.



6. a) När $\varphi = \pi/2$ blir matrisen

$$R(\pi/2) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} & 0 \\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Inversmatrisen beräknar vi med ett räkneschema

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ - \\ \\ \end{matrix} \sim$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Från räkneschemats högra halva kan vi avläsa inversen,

$$R(\pi/2)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Bildvektorn $R(\varphi)\boldsymbol{u}$ blir

$$R(\varphi)\,\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi - 2\sin\varphi \\ \sin\varphi + 2\cos\varphi \\ 2 \end{pmatrix}$$

och dess längd är

$$\begin{aligned} |\,R(\varphi)\boldsymbol{u}\,| &= \sqrt{(\cos\varphi - 2\sin\varphi)^2 + (\sin\varphi + 2\cos\varphi)^2 + 2^2} \\ &= \sqrt{\cos^2\varphi - 4\cos\varphi\sin\varphi + 4\sin^2\varphi + \sin^2\varphi + 4\sin\varphi\cos\varphi + 4\cos^2\varphi + 4} \\ &= \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi + 4(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + 4} \\ &= \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3. \end{aligned}$$

c) Med determinantregeln för produkter kan vi dela upp den sökta determinanten

$$\det\Big[R(\varphi)\,R(2\varphi)\Big] = \det R(\varphi)\cdot\det R(2\varphi).$$

Determinanten $\det R(\varphi)$ beräknas genom att utveckla längs den tredje raden

$$\det R(\varphi) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix} = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1.$$

Detta ger samtidigt att $\det R(2\varphi) = 1$ eftersom vi kan ersätta φ med 2φ i uträkningarna ovan. Alltså är

$$\det\Big[R(\varphi)\,R(2\varphi)\Big] = \det R(\varphi)\cdot\det R(2\varphi) = 1\cdot 1 = 1.$$

7. Avståndet från origo till en punkt (x,y,z) på ytan ges av avståndsformeln mellan punkter,

$$d = |\,(x,y,z) - (0,0,0)\,| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

För att slippa räkna med rottecknet kan vi istället söka det minsta värdet av avståndet i kvadrat, $d^2 = x^2+y^2+z^2$, som antar sitt minimum i samma punkt.

Om vi sätter $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ och $g(x,y,z) = xy + z^2 + 4$ så kan problemet formuleras som:

Minimera $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ när $g(x,y,z) = xy+z^2+4 = 0$.

Enligt Lagranges multiplikatormetod kommer det minsta värdet att antas i en av följande punkter

1. Punkter som uppfyller Lagrangevillkoret, d.v.s. att ∇f är parallell med ∇g.
2. Eventuella singulära punkter på ytan, d.v.s. punkter där $\nabla g = (0,0,0)$.

Vi undersöker dessa två fall.

1. Gradienterna ∇f och ∇g är parallella om det finns en skalär λ sådan att $\nabla f = \lambda \nabla g$, d.v.s.
$$(2x, 2y, 2z) = \lambda\,(y, x, 2z).$$
I komponentform och tillsammans med ytans ekvation ger detta ekvationssystemet
$$2x = \lambda y \tag{1}$$
$$2y = \lambda x \tag{2}$$
$$2z = 2\lambda z \tag{3}$$
$$xy + z^2 + 4 = 0 \tag{4}$$
Ekvation (1) och (2) bildar tillsammans ett linjärt ekvationssystem i x och y (om λ betraktas som en parameter)
$$\begin{cases} 2x - \lambda y = 0 \\ -\lambda x + 2y = 0 \end{cases}$$
Detta homogena ekvationssystem har alltid lösningen $x = y = 0$ men då ger (4) att $z^2 + 4 = 0$ som saknar lösning. Det är bara när koefficientmatrisens determinant är noll som det finns icke-triviala lösningar.
$$\begin{vmatrix} 2 & -\lambda \\ -\lambda & 2 \end{vmatrix} = 4 - \lambda^2 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda = -2 \quad \text{eller} \quad \lambda = 2.$$
Detta ger oss två delfall.

$\lambda = -2$: Då får vi från (1) och (2) att $x = -y$ och (3) ger att $z = 0$. Ekvation (4) ger att $-x^2 + 4 = 0$, d.v.s. $x = \pm 2$. Alltså får vi punkterna $(-2, 2, 0)$ och $(2, -2, 0)$.

$\lambda = 2$: Ekvationer (1) och (2) ger att $x = y$ och från (3) får vi att $z = 0$. Detta ger att (4) blir $x^2 + 4 = 0$ som saknar lösning.

Lagrangevillkoret ger alltså punkterna $(-2, 2, 0)$ och $(2, -2, 0)$.

2. Om vi sätter $\nabla g = (0, 0, 0)$ så får vi att $(y, x, 2z) = (0, 0, 0)$ som direkt ger att $x = y = z = 0$, men punkten $(0, 0, 0)$ ligger inte på ytan.

Eftersom
$$f(-2, 2, 0) = (-2)^2 + 2^2 + 0^2 = 8 \qquad \text{och} \qquad f(2, -2, 0) = 2^2 + (-2)^2 + 0^2 = 8$$
är det minsta avståndet från origo till ytan $xy + z^2 + 4 = 0$ lika med $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

8. a) Enligt satsen om inversa funktioner har variabelbytet en lokal (differentierbar) invers $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ i en omgivning av $(u,v) = (u_0, v_0)$ om

$$\det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right) = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \neq 0$$

i punkten $(u,v) = (u_0, v_0)$. Derivatorna i determinanten är

$$\begin{aligned}
x'_u &= \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}(u\, e^{u-v}) = 1 \cdot e^{u-v} + u\, e^{u-v} = (1+u)\, e^{u-v} \\
x'_v &= \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v}(u\, e^{u-v}) = -u\, e^{u-v} \\
y'_u &= \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}(v\, e^{u+v}) = v\, e^{u+v} \\
y'_v &= \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v}(v\, e^{u+v}) = 1 \cdot e^{u+v} + v\, e^{u+v} = (1+v)\, e^{u+v}
\end{aligned}$$

och i punkten $(u,v) = (u_0, v_0)$ blir därför determinanten lika med

$$\begin{vmatrix} (1+u_0)e^{u_0-v_0} & -u_0\, e^{u_0-v_0} \\ v_0\, e^{u_0+v_0} & (1+v_0)\, e^{u_0+v_0} \end{vmatrix} = (1+u_0)(1+v_0)e^{2u_0} + u_0 v_0\, e^{2u_0}.$$

Uttrycket i högerledet är större än 1 eftersom $u_0, v_0 > 0$ och exponentialfunktionen är större än 1 för positiva argument.

b) Vi ska bestämma de sökta derivatorna på två sätt.

Metod 1 (Implicit derivering)

Funktionerna $u = u(x,y)$ och $v = v(x,y)$ definieras av att de uppfyller sambanden

$$\begin{cases} x = u(x,y)\, e^{u(x,y)-v(x,y)} \\ y = v(x,y)\, e^{u(x,y)+v(x,y)} \end{cases} \qquad (*)$$

För att bestämma u'_x och v'_y ska vi först implicit derivera dessa samband med avseende på x och sedan med avseende på y.

Deriverar vi $(*)$ med avseende på x fås

$$\begin{cases} 1 = u'_x \cdot e^{u-v} + u \cdot e^{u-v}(u'_x - v'_x) \\ 0 = v'_x \cdot e^{u+v} + v \cdot e^{u+v}(u'_x + v'_x) \end{cases}$$

vilket är ett linjärt ekvationssystem i u'_x och v'_x,

$$\begin{cases} (1+u)e^{u-v}\, u'_x - \quad ue^{u-v}\, v'_x = 1 \\ ve^{u+v}\, u'_x + (1+v)e^{u+v}\, v'_x = 0 \end{cases}$$

Cramers regel ger

$$u'_x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -u\, e^{u-v} \\ 0 & (1+v)e^{u+v} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1+u)e^{u-v} & -u\, e^{u-v} \\ ve^{u+v} & (1+v)e^{u+v} \end{vmatrix}} = \frac{(1+v)e^{u+v}}{(1+u+v+2uv)e^{2u}} = \frac{1+v}{1+u+v+2uv}\, e^{-(u-v)}.$$

Deriverar vi sedan $(*)$ med avseende på y fås

$$\begin{cases} 0 = u'_y \cdot e^{u-v} + u \cdot e^{u-v}(u'_y - v'_y) \\ 1 = v'_y \cdot e^{u+v} + v \cdot e^{u+v}(u'_y + v'_y) \end{cases}$$

och efter att ha samlat ihop u'_y och v'_y

$$\begin{cases} (1+u)e^{u-v}\, u'_y - \quad ue^{u-v}\, v'_y = 0 \\ ve^{u+v}\, u'_y + (1+v)e^{u+v}\, v'_y = 1 \end{cases}$$

Med Cramers regel får vi

$$v'_y = \frac{\begin{vmatrix} (1+u)e^{u-v} & 0 \\ ve^{u+v} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1+u)e^{u-v} & -u\,e^{u-v} \\ ve^{u+v} & (1+v)e^{u+v} \end{vmatrix}} = \frac{(1+u)e^{u-v}}{(1+u+v+2uv)e^{2u}} = \frac{1+u}{1+u+v+2uv}\, e^{-(u+v)}.$$

Metod 2 (Inversens jacobimatris)

Eftersom $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ är en lokal inversfunktion till $x = x(u,v) = u\,e^{u-v}$, $y = y(u,v) = v\,e^{u+v}$ har u,v-funktionen en jacobimatris som är inversmatrisen av jacobimatrisen för x,y-funktionen,

$$\begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} (1+u)e^{u-v} & -ue^{u-v} \\ ve^{u+v} & (1+v)e^{u+v} \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \{\text{ invers av en } 2{\times}2\text{-matris }\}$$

$$= \frac{1}{(1+u)(1+v)e^{2u} + uve^{2u}} \begin{pmatrix} (1+v)e^{u+v} & ue^{u-v} \\ -ve^{u+v} & (1+u)e^{u-v} \end{pmatrix}.$$

Från detta samband kan vi direkt avläsa att

$$u'_x = \frac{(1+v)e^{u+v}}{(1+u)(1+v)e^{2u} + uve^{2u}} = \frac{1+v}{1+u+v+2uv}\, e^{-(u-v)},$$

$$v'_y = \frac{(1+u)e^{u-v}}{(1+u)(1+v)e^{2u} + uve^{2u}} = \frac{1+u}{1+u+v+2uv}\, e^{-(u+v)}.$$

9. a) Om vektorn $\boldsymbol{v}$ är en egenvektor till matrisen A ska $\boldsymbol{v}$ uppfylla likheten $A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$ för något egenvärde λ. I detta fall är

$$A\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 7 & 2 \\ -1 & 3 & 5 & 2 \\ 7 & 5 & -9 & -2 \\ 2 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-2+7+2 \\ -1+6+5+2 \\ 7+10-9-2 \\ 2+4-2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 6\boldsymbol{v}.$$

Detta visar att $\boldsymbol{v}$ är en egenvektor med egenvärdet 6.

b) Egenvektorerna som hör till egenvärdet 2 uppfyller

$$Av = 2v \qquad \Leftrightarrow \qquad (A - 2E)v = \mathbf{0}.$$

Vi löser detta linjära ekvationssystem genom att ställa upp systemet i ett räkneschema och gausseliminera.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -3 & -1 & 7 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 5 & 2 & 0 \\ 7 & 5 & -11 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 5 & 2 & 0 \\ -3 & -1 & 7 & 2 & 0 \\ 7 & 5 & -11 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} -3 \quad 7 \quad 2 \quad - \\ \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -5 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & -4 & 0 \\ 0 & 12 & 24 & 12 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{12} \\ \frac{1}{4} \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ - \quad - \quad + \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

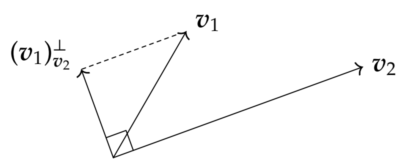
Från detta slutschema kan vi avläsa att egenvektorerna är

$$v = \begin{pmatrix} 3s+t \\ -2s-t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (s\,,\ t \text{ parametrar})$$

Två linjärt oberoende egenvektorer är alltså

$$v_1 = (3, -2, 1, 0) \quad \text{och} \quad v_2 = (1, -1, 0, 1).$$

För att få två ortogonala (vinkelräta) egenvektorer i egenrummet ersätter vi vektorn v_1 med komposanten $(v_1)^{\perp}_{v_2}$ som är vinkelrät mot v_2.



$$
\begin{aligned}
(v_1)^{\perp}_{v_2} &= v_1 - (v_1)_{v_2} = v_1 - \frac{v_1 \cdot v_2}{|v_2|^2}\, v_2 \\
&= (3,-2,1,0) - \frac{(3,-2,1,0)\cdot(1,-1,0,1)}{|(1,-1,0,1)|^2}\,(1,-1,0,1) \\
&= (3,-2,1,0) - \frac{3\cdot 1 + (-2)\cdot(-1) + 1\cdot 0 + 0\cdot 1}{1^2+(-1)^2+0^2+1^2}\,(1,-1,0,1) \\
&= (3,-2,1,0) - \tfrac{5}{3}\,(1,-1,0,1) = (\tfrac{4}{3}, -\tfrac{1}{3}, 1, -\tfrac{5}{3}).
\end{aligned}
$$

Slutligen får vi två ortonormala egenvektorer genom att normera $(v_1)^{\perp}_{v_2}$ och v_2 .

- $\dfrac{3(v_1)^{\perp}_{v_2}}{|3(v_1)^{\perp}_{v_2}|} = \dfrac{(4,-1,3,-5)}{|(4,-1,3,-5)|} = \dfrac{(4,-1,3,-5)}{\sqrt{4^2+(-1)^2+3^2+(-5)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{51}}\,(4,-1,3,-5)$
- $\dfrac{v_2}{|v_2|} = \dfrac{(1,-1,0,1)}{|(1,-1,0,1)|} = \dfrac{(1,-1,0,1)}{\sqrt{1^2+(-1)^2+0^2+1^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\,(1,-1,0,1)$

10. Kurvan $g(x,y) = 0$ uppfyller $\nabla g(x,y) \neq (0,0)$ vilket betyder att i varje punkt på kurvan är åtminstone en av partialderivatorna $g'_x(x,y)$ och $g'_y(x,y)$ skild från noll.

Låt oss anta att $g'_y(x,y) \neq 0$ i en punkt på kurvan. Implicita funktionssatsen ger då att i en omgivning av punkten kan kurvan skrivas som $y = y(x)$ där $y(x)$ är en kontinuerligt deriverbar funktion.

Eftersom $f(x,y)$ är konstant på kurvan är $f(x,y(x)) \equiv C$ för alla punkter $(x,y) = (x,y(x))$ i omgivningen. Deriverar vi detta samband med kedjeregeln fås

$$\frac{d}{dx} f(x,y(x)) = f'_x(x,y) + f'_y(x,y)\, y'(x) = 0. \qquad (*)$$

Derivatan $y'(x)$ kan vi beräkna genom att derivera sambandet $g(x,y(x)) \equiv 0$,

$$\frac{d}{dx} g(x,y(x)) = g'_x(x,y) + g'_y(x,y)\, y'(x) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad y'(x) = -\frac{g'_x(x,y)}{g'_y(x,y)}.$$

Detta insatt i $(*)$ ger att

$$f'_x(x,y) - f'_y(x,y)\,\frac{g'_x(x,y)}{g'_y(x,y)} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad f'_x(x,y)\, g'_y(x,y) = f'_y(x,y)\, g'_x(x,y).$$

I punkter där $g'_y(x,y) = 0$ är istället $g'_x(x,y) \neq 0$ och vi kan använda ovanstående resonemang men med x och y i ombytta roller.