Institutionen för matematik
KTH

Tentamensskrivning, 2002-12-17, kl. 8.00–13.00.

5B1116 Matematik 2, för E, ME och Media.

5B1136 Matematik 2, för I.

För betyg 3 (godkänt), 4 och 5 krävs minst 16, 22 respektive 30 poäng inklusive bonuspoäng.

Samtliga behandlade uppgifter ska förses med utförlig lösning och motivering.

Lösningsförslag finns efter skrivningstidens slut på kurshemsidan.

Inga hjälpmedel!

1. Lös ekvationssystemet $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 3x + z = 6 \\ 2x + 2y + z = 9 \end{cases}$ (3p)

2. Bestäm riktningsderivatan av funktionen $f(x, y, z) = 2xz - y^2$ i punkten $(1, 1, -1)$ i riktning mot punkten $(3, -2, 5)$. (3p)

3. Låt P vara skärningspunkten mellan linjen $\boldsymbol{r}(t) = (1, -2, 1) + t\,(-1, 3, 0)$ och planet $x + y + 3z = 6$.
   a) Bestäm punkten P. (2p)
   b) Bestäm den linje (i parameterform) som går genom punkten P och är vinkelrät mot planet. (1p)

4. Bestäm alla lokala extrempunkter till funktionen $f(x, y) = x - 2y + x^3 + 2xy - 2y^2$ och ange för varje punkt om den är lokalt maximum eller minimum. (3p)

5. Transformera ekvationen $9x^2 + 6xy + 9y^2 = 2$ till huvudaxelform. Vilken typ av kurva motsvarar ekvationen geometriskt? Bestäm huvudaxlarnas riktningar och skissera kurvan i x,y-planet. (3p)

6. Låt $R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   a) Bestäm inversen till matrisen $R(\pi/2)$. (1p)
   b) Beräkna längden av vektorn $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ efter transformation med $R(\varphi)$, d.v.s. längden av vektorn $R(\varphi)\boldsymbol{u}$. (1p)
   c) Beräkna determinanten av $R(\varphi)\,R(2\varphi)$. (2p)

7. Bestäm det kortaste avståndet från origo till ytan $xy + z^2 + 4 = 0$. (Ledning: Använd avståndet i kvadrat i beräkningarna.) (4p)

V.g. vänd!

8. Låt $\begin{cases} x = ue^{u-v} \\ y = ve^{u+v} \end{cases}$ och låt (u_0, v_0) vara en punkt i första kvadranten (d.v.s. $u_0, v_0 > 0$).

a) Visa att variabelbytet har en invers (d.v.s. att det går att lösa ut u och v som funktioner av x och y) i en omgivning av $(u, v) = (u_0, v_0)$. (2p)

b) Bestäm partialderivatorna u'_x och v'_y uttryckta i u och v . (2p)

9. Givet matrisen $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 7 & 2 \\ -1 & 3 & 5 & 2 \\ 7 & 5 & -9 & -2 \\ 2 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Visa att $v = (1, 2, 1, 1)$ är en egenvektor till A och bestäm motsvarande egenvärde. (1p)

b) Bestäm två ortonormerade egenvektorer till A som svarar mot egenvärdet 2 . (3p)

10. Antag att en kontinuerligt deriverbar funktion $f(x, y)$ är konstant på kurvan $g(x, y) = 0$, där g är kontinuerligt deriverbar och $\nabla g(x, y) \neq (0, 0)$ överallt. Visa att då är

$$f'_x(x, y)\, g'_y(x, y) = f'_y(x, y)\, g'_x(x, y)$$

för alla punkter på kurvan. (4p)