Institutionen för matematik
KTH

Tentamensskrivning, 2003-04-22, kl. 8.00–13.00.

5B1116 Matematik 2, för B, Bio, E, IT, K, ME och Media.

5B1136 Matematik 2, för I och Öppen ingång.

För betyg 3 (godkänt), 4 och 5 krävs minst 16, 22 respektive 30 poäng inklusive bonuspoäng.

Samtliga behandlade uppgifter ska förses med utförlig lösning och motivering.

Lösningsförslag finns efter skrivningstidens slut på kurshemsidan.

Inga hjälpmedel!

1. Visa att funktionen $f(x,y) = xy \arctan \dfrac{x}{y}$ uppfyller $y f''_{xy} + x f''_{xx} - f'_x = 0$. (3p)

2. Bestäm skärningspunkten mellan planen $x + 2y - z = 1$, $2x - y + 2z = 0$ och $x + 3y - 2z = 2$. (3p)

3. Avgör om vektorerna $(1, 0, -1, 1)$, $(2, 0, 2, 1)$, $(0, 1, -1, 1)$ och $(0, -2, 0, -1)$ bildar en bas för R^4. (3p)

4. Beräkna uttrycket $(A + B^{-1})A^{-1}$ om A och B är $3{\times}3$-matriser och
$$AB = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$ (3p)

5. En humla befinner sig i punkten $(1, 2, -1)$ och avser att bege sig därifrån antingen i riktningen $\boldsymbol{u} = (2, -2, -1)$ eller i riktningen $\boldsymbol{v} = (3, 0, 4)$. Vilken riktning ska humlan välja för att uppnå störst, omedelbar temperaturökning? Temperaturen i rummet ges av $T = 3xy + y^2 + 2z^2$. (3p)

6. Andragradskurvan $\frac{1}{2}x^2 - \sqrt{3}\,xy - \frac{1}{2}y^2 = 1$ är en hyperbel och består alltså av två grenar. Bestäm det minsta avståndet mellan de två grenarna. (4p)

7. Sambandet mellan variablerna (x, y) och (u, v) ges av $x = u^2/v$ och $y = v^2/u$.
   a) Visa att funktionen $(\,x(u,v), y(u,v)\,)$ har en invers i någon omgivning av punkten $(u, v) = (u_0, v_0)$ där $u_0, v_0 \neq 0$. (2p)
   b) Bestäm partialderivatorna $\partial u/\partial x$ och $\partial u/\partial y$ uttryckta i u och v. (2p)

8. Bestäm det största och minsta värdet av funktionen $f(x,y) = 2x^2 + xy + 3y^2$ i kvadraten $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$. (4p)

V.g. vänd!

9. Låt A vara en $3{\times}2$-matris och P det plan i rummet som spänns upp av kolonnvektorerna till A och som går genom origo.

   a) Visa att vektorn $A\boldsymbol{u}$ ligger i planet P för varje vektor $\boldsymbol{u}$. (1p)

   Låt vidare $\boldsymbol{b}$ vara en punkt utanför planet P och $\boldsymbol{c}$ vara den vinkelräta projektionen av $\boldsymbol{b}$ på P.

   b) Visa att $A^T(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{0}$. (2p)

   c) Visa att om $\boldsymbol{x}$ är en lösning till ekvationssystemet $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ så gäller att $A^TA\boldsymbol{x} = A^T\boldsymbol{b}$. (Resultatet från deluppgift b får användas.) (1p)

10. En reellvärd funktion f sägs vara homogen av ordning a om

$$f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^a f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

   a) Ge ett exempel på en homogen funktion av ordning 2 när $n = 3$. (1p)

   b) Visa att en differentierbar homogen funktion f av ordning a uppfyller

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot \operatorname{grad} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a f(x_1, x_2, \ldots, x_n). \qquad \text{(3p)}$$