Tentamensskrivning, 2007-05-24, kl. 14.00–19.00.

5B1219 Vektoranalys och komplexa funktioner, för E.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.

För godkänt betyg (3) krävs minst 4 av 5 moduler godkända (Del 1). För överbetyg krävs dessutom deltagande i Del 2. Lösningarna skall motiveras väl!

TENTAMENSSKRIVNING: DEL 1

1. [MODUL 1] Undersök om vektorfältet

$$\mathbf{F} = (xy, xz, -yz)$$

har en vektorpotential, samt bestäm i så fall en sådan. Kom ihåg: en vektorpotential $\mathbf{A}$ till $\mathbf{F}$ löser $\operatorname{rot}\mathbf{A} = \mathbf{F}$.

Vi beräknar divergensen till $\mathbf{F}$:

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial y}(xz) - \frac{\partial}{\partial z}(yz) = y + 0 - y = 0.$$

Fältet är alltså divergensfritt, vilket innebär att det har en vektorpotential. Vi söker $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$ så att

$$\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} = xy, \quad \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} = xz, \quad \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} = -yz.$$

Vi finner att

$$A_1 = xz^2/2, \quad A_2 = -xyz, \quad A_3 = 0,$$

är en lösning. Vektorpotentialen kan alltså väljas som

$$\mathbf{A} = (xz^2/2, -xyz, 0).$$

---

2. [MODUL 2] Ett ortogonalt kroklinjigt koordinatsystem (u, v, w) definieras genom

$$(u, v, w) = (x^3 - 3xy^2, 3x^2y - y^3, 3z),$$

där (x, y, z) betecknar ortsvektorn i vanliga koordinater. Beräkna divergensen av vektorfältet

$$\mathbf{B} = u\,\mathbf{e}_u + v\,\mathbf{e}_v + w\,\mathbf{e}_w,$$

där $\mathbf{e}_u$, $\mathbf{e}_v$, $\mathbf{e}_w$ betecknar motsvarande kroklinjiga enhetsvektorer.

V.g. vänd!

Gradienterna till u, v, w är

$$\nabla u = (3x^2 - 3y^2, -6xy, 0), \quad \nabla v = (6xy, 3x^2 - 3y^2, 0), \quad \nabla w = (0, 0, 3).$$

Vi beräknar nu skalfaktorerna

$$h_u = \frac{1}{|\nabla u|} = \frac{1}{3(x^2 + y^2)}, \quad h_v = \frac{1}{|\nabla v|} = \frac{1}{3(x^2 + y^2)}, \quad h_w = \frac{1}{3}.$$

Vi får att basvektorerna kan uttryckas som (BETA, s. 246)

$$\mathbf{e}_u = h_u \nabla u = \frac{1}{x^2 + y^2}\,(x^2 - y^2, -2xy, 0),$$

samt

$$\mathbf{e}_v = h_v \nabla v = \frac{1}{x^2 + y^2}\,(2xy, x^2 - y^2, 0),$$

och

$$\mathbf{e}_w = h_w \nabla w = (0, 0, 1).$$

Efter lite förenklingar blir nu

$$\mathbf{B} = u\,\mathbf{e}_u + v\,\mathbf{e}_v + w\,\mathbf{e}_w = (x^3 + xy^2, x^2y + y^3, 3z).$$

Divergensen räknar vi ut på vanligt vis:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial x}(x^3 + xy^2) + \frac{\partial}{\partial y}(x^2y + y^3) + \frac{\partial}{\partial z}(3z) = 4x^2 + 4y^2 + 3.$$

---

3. [MODUL 3] Förklara hur Newtonkärnan används för att lösa Poissons ekvation i allmänhet. Visa hur den nyttjas för att få en lösning till

$$\nabla^2 u = 1 \quad \text{på} \quad B_3,$$

där B_3 är enhetsklotet $x^2 + y^2 + z^2 < 1$. Finn därefter med någon enklare metod en (ev annan) explicit lösning ovanstående Poisson-ekvation. Modifiera slutligen denna till att ha randvärde noll på enhetssfären ∂B_3.

Poissons ekvation $\nabla^2 u = \rho$ löser vi i rummet $\mathbf{R}^3$ med integralformeln

$$u(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint_{\mathbf{R}^3} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\, dV(\mathbf{r}').$$

Denna lösning blir vanligtvis liten i oändligheten. Det givna problemet kan vi alltså lösa med

$$u(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint_{B_3} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\, dV(\mathbf{r}').$$

En explicit lösning ges av

$$u(\mathbf{r}) = u(x, y, z) = \frac{|\mathbf{r}|^2}{6} = \frac{1}{6}\left(x^2 + y^2 + z^2\right).$$

Slutligen vill vi justera lösningen (med en harmonisk funktion) så att vi får randvärde noll. Konstanta funktioner är harmoniska, så vår lösning blir

$$u(\mathbf{r}) = u(x, y, z) = \frac{|\mathbf{r}|^2 - 1}{6} = \frac{1}{6}\left(x^2 + y^2 + z^2 - 1\right).$$

---

4. [MODUL 4] Låt $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, där $z = x + iy$, vara en analytisk funktion. Visa att funktionen $w(x, y) = u(x, y)\, v(x, y)$ är harmonisk.

Funktionen

$$g(z) = g(x, y) = xy$$

är harmonisk, och $w = g \circ f(z) = g(f(z))$ är alltså sammansättning av en harmonisk och en analytisk funktion, och därför en harmonisk funktion. Uppgiften kan också lösas med användande av CR.

---

5. [MODUL 5] Finn en harmonisk funktion $u(x, y)$ på enhetsskivan $x^2 + y^2 < 1$ vars randvärde är lika med 2 på bågen I_1, och lika med -5 på bågen I_2. Härvid ges I_1 som alla punkter $(\cos t, \sin t)$, med $0 < t < \pi$, och I_2 består av alla punkter $(\cos t, \sin t)$, med $-\pi < t < 0$.

Avbildningen

$$w = i\frac{1-z}{1+z}$$

skickar enhetsskivan $|z| < 1$ på övre halvplanet, och I_1 skickas på positiva reella axeln, medan I_2 skickas på negativa reella axeln. Argumentfunktionen i övre halvplanet tänker vi oss ta värdet 0 längs positiva rella axeln, och värdet π längs med den negativa. Då blir

$$\frac{7}{\pi}\arg\left(i\frac{1-z}{1+z}\right)$$

en funktion som är harmonisk i enhetsskivan med värde 0 på I_1 och värde 7 på I_2. Lösningen blir slutligen

$$u(x, y) = 2 - \frac{7}{\pi}\arg\left(i\frac{1-z}{1+z}\right).$$