Institutionen för Matematik, KTH,
Olle Stormark.

EXEMPELSAMLING I KOMPLEXA FUNKTIONER

INNEHÅLLSFÖRTECKNING

VARNING: Under en tentamensskrivning har man *faktiskt inte* tillgång till ledningar och svar. Så om du vill förbereda dig för tentan så ska du *inte* titta på ledningarna innan du har gjort ditt yttersta för att *själv* hitta korrekta lösningar.

Komplexa tal

1. Reducera följande uttryck till formen $a+ib$, där a och b är reeella tal:

   (a) $\frac{6+7i}{7i-3}+\frac{2+5i}{3+7i}-\frac{1+i}{58}$,

   (b) $\frac{1+i}{2-i}+\frac{1-i}{(1+i)^2}+\frac{2i-3}{5}$,

   (c) $\frac{\frac{1}{1+i}+\frac{1}{1-i}}{\frac{1}{1+i}-\frac{1}{1-i}}-\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+i}}}$.

2. Beräkna $z=x+iy$ då

   (a) $\frac{x-iy}{1+i}=\frac{2y}{1-i}$,

   (b) $z+3\bar{z}=1-i$,

   (c) $2z-2i\bar{z}=2+4i$.

3. Visa att
$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2|z_1|^2+2|z_2|^2,$$
   och tolka detta resultat geometriskt.

4. Tre punkter z_1, z_2 och z_3 i det komplexa planet bildar hörnen i en rätvinklig triangel med den räta vinkeln vid z_1. Visa att
$$|z_1|^2+\mathrm{Re}\,(z_2\bar{z}_3)=\mathrm{Re}\,(\bar{z}_1(z_2+z_3)).$$

5. Bevisa olikheten
$$|z|\geq\frac{1}{\sqrt{2}}(|\mathrm{Re}\,z|+|\mathrm{Im}\,z|).$$
   När gäller likhet?

6. Bestäm absolutbelopp och argument av följande komplexa tal:

   (a) $\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$,

   (b) $(1+i)^6$,

   (c) $\frac{1}{(1-i)^9}$,

   (d) $\frac{(1+i)^4}{(1+i\sqrt{3})^2}$,

   (e) $\left(\frac{i-\sqrt{3}}{2}\right)^{167}$,

(f) $e^{i\phi}+1$, där $-\pi<\phi<\pi$,

(g) $1+z+z^2+z^3$ för $z=e^{i\phi}$.

7. Visa att
$$\sum_{j=1}^{n}\sin(2j-1)x=\frac{\sin^2 nx}{\sin x}.$$

8. Visa olikheten
$$|e^{i\phi_1}-e^{i\phi_2}|\leq|\phi_1-\phi_2|.$$

9. Bestäm alla rötterna till ekvationerna

   (a) $z^5=2i$,

   (b) $z^4+z^3+z^2+z+1=0$.

10. Låt n vara ett positivt heltal. Visa att samtliga rötter till ekvationen $(z+i)^n=(z-i)^n$ måste vara reella.

11. Ett öppet sammanhängande område i komplexa planet kallas för en *domän*. Vilka av följande områden är domäner? Vilken eller vilka är *enkelt sammanhängande*?

   (a) $\{z\in\mathbb{C}\mid|\operatorname{Re}z|\leq k\}$, där $k\in\mathbb{R}$,

   (b) $\{z\in\mathbb{C}\mid|\operatorname{Im}z|\leq k\}$, där $k\in\mathbb{R}$,

   (c) $\{z\in\mathbb{C}\mid\operatorname{Re}\frac{1}{z}=k\}$, där $k\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$,

   (d) $\{z\in\mathbb{C}\mid|z-a|\leq r\}$, där $a\in\mathbb{C}$ och $r>0$,

   (e) $\{z\in\mathbb{C}\mid r_1<|z-a|<r_2\}$, där $a\in\mathbb{C}$ och $0<r_1<r_2$,

   (f) $\{z\in\mathbb{C}\mid 0<|z-a|<\infty\}$, där $a\in\mathbb{C}$,

   (g) $\{z\in\mathbb{C}\mid|\arg z|<\pi\}$,

   (h) $\{z\in\mathbb{C}\mid|\arg(z-a)|\leq\alpha\}$, där $a\in\mathbb{C}$ och $0<\alpha<\pi$.

12. Låt z_1, $z_2\in\mathbb{C}$ och låt k vara ett positivt reellt tal. Visa att
$$\mathcal{C}_k=\{z\in\mathbb{C}\mid\frac{|z-z_1|}{|z-z_2|}=k\}$$

   (a) är en rät linje om $k=1$,

(b) är en cirkel med medelpunkten $z_0 = \frac{z_1 - k^2 z_2}{1-k^2}$ och radien $k \frac{|z_1 - z_2|}{1-k^2}$ om $k \neq 1$.

13. Låt a vara ett komplext tal med egenskapen $0 < |a| < 1$. Visa att:

    (a) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| < |1-\bar{a}z|\} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$,

    (b) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| = |1-\bar{a}z|\} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$,

    (c) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| > |1-\bar{a}z|\} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$.

    Använd dessa resultat för att tolka vad funktionen $w = (z-a)/(1-\bar{a}z)$ gör geometriskt.

14. Skissera bilderna av följande områden under avbildningen $w = \frac{1}{z}$:

    (a) $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z = a\}$, där $a > 0$,

    (b) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-c| = r\}$, där $0 < r < c$,

    (c) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-r| = r\}$, där $0 < r < \infty$.

Cauchy-Riemannekvationerna

15. Vilka av följande funktioner är analytiska i någon del av det komplexa planet?

$$\bar{z}, \quad |z|, \quad \operatorname{Re} z, \quad |z|^2, \quad z^2, \quad z^2 \arg z, \quad \frac{x-iy}{x^2+y^2}.$$

16. Vilka av följande funktioner kan vara realdelar av analytiska funktioner? Bestäm i förekommande fall dessa analytiska funktioner (som funktioner av $z = x + iy$)!

    (a) $1 - x - 2y$,

    (b) $e^x(x \cos y + a\, y \sin y)$ för ett lämpligt val av $a \in \mathbb{R}$,

    (c) $\ln(x^2 + y^2) + x + 2y$,

    (d) $(x-y)e^{xy}$.

17. Visa först att Cauchy-Riemannekvationerna i polära koordinater ges av
$$r\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad r\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{\partial u}{\partial \theta},$$
där $z = x + iy = re^{i\theta}$, och visa sedan att funktionen $\log z = \ln r + i\theta$ uppfyller dessa ekvationer.

18. Realdelen av en viss analytisk funktion är lika med summan av en funktion, som enbart beror på x, och en funktion som enbart beror på y. Visa att den analytiska funktionen är av formen $az^2 + bz + c$, där a, b, c är konstanter, och a dessutom är reell.

Elementära funktioner

19. Lös ekvationen
$$e^{(e^z)} = i.$$

20. Hur avbildar $w = e^z$ följande linjer och områden i z-planet?
    (a) Räta linjerna $\operatorname{Re} z = -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$, respektive $\operatorname{Im} z = -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$.
    (b) Räta linjen $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z\}$.
    (c) Bandet $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$.
    (d) Halvbandet $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0 \text{ och } \beta < \operatorname{Im} z < \gamma\}$, där $0 < \gamma - \beta < \pi/2$.

21. Hur avbildas genom $w = e^{iz}$
    (a) halvbandet $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Re} z < \pi/2 \text{ och } \operatorname{Im} z > 0\}$,
    (b) halvbandet $\{z \in \mathbb{C} \mid \beta < \operatorname{Re} \ < \gamma \text{ och } \operatorname{Im} z < 0\}$, där $0 < \gamma - \beta < \pi/2$?

22. Beräkna samtliga värden av följande funktioner, och ange dem på formen $a + ib$, där a och b är rella:
    (a) $(1 + i)^i$,
    (b) $(\log i)^i$.

23. För vilka reella positiva värden på x kan $(-x)^{-x}$ anta ett rent imaginärt värde?

24. Lös ekvationen $z^{\sqrt{3}} = 1 + i$.

25. Lös ekvationerna

    (a) $\tan z = 2i$,
    (b) $\cosh 2z + \sinh 2z = i(\cosh z - \sinh z)$,
    (c) $\sin z = 1000$,
    (d) $\cos z = 1,25$,
    (e) $\sin z = 5i$.

26. Lös ekvationen $\cos z + i \sin z = 2$, och ange svaret på formen $a + ib$, där a och b är reella.

27. För vilka värden på z antar $\sin z$, $\cos z$ och $\tan z$ rent reella respektive rent imaginära värden?

28. Hur avbildar $w = \sin z$ följande mängder?

    (a) $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \operatorname{Re} z \leq a \text{ och } \operatorname{Im} z = c\}$, där $a = \pi/2$, π eller 2π och $c > 0$,
    (b) $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z = c\}$, där $c \in \mathbb{R}$.

29. Hur avbildar $w = \sin z$ följande band?

    (a) $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \operatorname{Re} z \leq \pi/2 \text{ och } \operatorname{Im} z \geq 0\}$,
    (b) $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \operatorname{Re} z \leq \pi/2 \text{ och } \operatorname{Im} z < 0\}$,
    (c) $\{z \in \mathbb{C} \mid -\pi/2 \leq \operatorname{Re} z \leq 0 \text{ och } \operatorname{Im} z \geq 0\}$,
    (d) $\{z \in \mathbb{C} \mid -\pi/2 \leq \operatorname{Re} z \leq 0 \text{ och } \operatorname{Im} z \leq 0\}$.

30. Här är en funktion $f(z)$ och en kurva C givna, och man frågar efter bilden $f(C)$ av C under avbildningen $w = f(z)$.

    (a) $f(z) = z^2$ och $C = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z = 1\}$,
    (b) $f(z) = \frac{z(1-2z)}{z-2}$ och $C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-2| = 1\}$,
    (c) $f(z) = \frac{iz-2}{z+i}$ och $C = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z = 0\}$,

(d) $f(z) = \frac{2iz-4}{z+i}$ och $C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$,

(e) $f(z) = \frac{1}{1-z^2}$ och $C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \text{ och } \operatorname{Im} z > 0\}$.

31. Låt funktionen $w = z^2$ vara given.

(a) Rita de kurvor i z-planet som svarar mot linjerna $\operatorname{Re} w = 0,\ 1,\ 2,\ 3$ respektive $\operatorname{Im} w = 0,\ 1,\ 2,\ 3$ i w-planet.

(b) Hur avbildas

i. vinkelrummet $\{z \in \mathbb{C} \mid \phi_1 < \arg z < \phi_2\}$, där $\phi_2 - \phi_1 < \pi$,

ii. cirkelsektorn $\{z \in \mathbb{C} \mid \phi_1 \leq \arg z \leq \phi_2 \text{ och } |z| \leq r\}$?

Var är avbildningen inte konform?

(c) Hur avbildas halvbanden $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Re} z < c \text{ och } \operatorname{Im} z > 0\}$ respektive $\{z \in \mathbb{C} \mid -c < \operatorname{Re} z < c \text{ och } \operatorname{Im} z > 0\}$, där $c > 0$?

32. Vad blir slutvärdet av funktionen $w = \sqrt{1 - z^2}$ då man startar i $z = 0$ med $w(0) = 1$ och sedan följer halvcirkeln $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| = 1 \text{ och } \operatorname{Im} z \geq 0\}$ till $z = 2$?

33. Vad blir slutvärdet av funktionen $w = \sqrt{(1 - z)(1 + z^2)}$ då man startar i $z = 0$ med $w(0) = 1$ och sedan går rätlinjigt först till $z = 1 + i$ och sedan till $z = 2$?

34. Låt z genomlöpa cirkeln $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1/2\}$ ett varv i positiv led med början och slut i $z = 1/2$. Vad blir slutvärdet av funktionen $w = z^z$ om begynnelsevärdet är $w(1/2) = 1/\sqrt{2}$?

Konforma avbildningar

35. Ge geometriska tolkningar av följande funktioner, där a är en komplex konstant:

(a) $w = z + a$,

(b) $w = az$,

(c) $w = 1/z$.

36. Visa genom att utföra divisionen att Möbiusfunktionen

$$w = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad - bc \neq 0,$$

kan uppfattas som sammansatt av de i förra exemplet angivna funktionerna.

37. Visa med hjälp av föregående två uppgifter att Möbiusfunktioner avbildar cirklar och räta linjer på cirklar och räta linjer.

38. Använd resultatet i uppgiften ovan för att lösa 30 (d).

39. Hur avbildas området

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1,\ |z - 1/2| > 1/2,\ \operatorname{Re} z > 0,\ \operatorname{Im} z > 0\}$$

genom funktionen $w = \frac{1}{z-1}$?

40. Bestäm en Möbiusfunktion som avbildar området $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-5| \geq 2\}$ på $\{w \in \mathbb{C} \mid |w| \leq 1\}$ så att $w(1) = 0$.

41. Visa med hjälp av spegelpunkter att en Möbiusfunktion som avbildar övre halvplanet $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ på enhetsskivan $\{w \in \mathbb{C} \mid |w| \leq 1\}$ är av formen

$$w = e^{i\alpha}\frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}, \qquad \text{där } \operatorname{Im} z > 0 \text{ och } \alpha \in \mathbb{R}.$$

42. Visa att en Möbiusfunktion som avbildar $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ på $\{w \in \mathbb{C} \mid |w| \leq 1\}$ har formen

$$w = e^{i\alpha}\frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}, \qquad \text{där } |z_0| < 1 \text{ och } \alpha \in \mathbb{R}.$$

43. Avbilda halvcirkeln $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 \text{ och } \operatorname{Im} z > 0\}$ på enhetsskivan $\{w \in \mathbb{C} \mid |w| < 1\}$ så att $z = \frac{1}{2}(1+i)$ hamnar på $w = 0$.

44. Bestäm en Möbiusfunktion som avbildar de excentriskt belägna cirklarna $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| = 1\}$ och $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 4\}$ i två koncentriska cirklar med $w = 0$ som medelpunkt och med den yttre cirkelns radie lika med ett givet tal R.

45. Hur avbildar $w = \tan z$ bandet

$$\{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \operatorname{Re} z \leq \pi/2 \text{ och } z \neq \pi/2\}?$$

46. Avbilda $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 2 \text{ och } |z-1| > 1\}$ konformt på $\{w \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Im} w - \operatorname{Re} w| < 1\}$.

47. Området $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > |\operatorname{Im} z|\}$ avbildas på ett område D i w-planet genom funktionen
$$w = \frac{z-1}{z+1}.$$
Beräkna arean av D.

48. Finns det någon funktion $w = f(z)$ som är analytisk i första kvadranten, antar absolutvärdet 1 på positiva reella och imaginära axlarna, samt har ett nollställe i $z = 1 + 2i$?

49. Området $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 3 \text{ och } |z-1| > 1\}$ avbildas med en Möbiusfunktion på en cirkelring i w-planet med $w = 0$ som medelpunkt och yttre radien lika med 1. Hur stor blir radien i den inre randcirkeln?

50. Avbilda $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 \text{ och } 0 < \arg z < \pi/n\}$ (där n är ett positivt heltal) konformt på enhetsskivan $\{w \in \mathbb{C} \mid |w| < 1\}$.

51. Avbilda z-planet uppskuret längs imaginära axeln från $z = 0$ till $z = i$ på övre halvplanet $\{w \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} w > 0\}$.

52. Man vill bestämma strömlinjerna kring kroppen

$$K = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-i| \leq \sqrt{2} \text{ och } |z+i| \leq \sqrt{2}\}$$

vid en strömning som långt borta från K är parallell med reella axeln. Genomför detta genom att avbilda det yttre av K konformt på det yttre av slitsen $\{w \in \mathbb{C} \mid -1 \leq \operatorname{Re} w \leq 1 \text{ och } \operatorname{Im} w = 0\}$ – ty då övergår strömlinjerna i z-planet i strömlinjerna $\{w \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} w = \text{konstant}\}$ i w-planet, och de förra fås som inversa bilden av de senare.

53. Avbilda halvbandet $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0 \text{ och } 0 < \operatorname{Im} z < 1\}$ konformt på halvcirkelskivan $\{w \in \mathbb{C} \mid |w| < 1 \text{ och } \operatorname{Re} w > 0\}$ så att $w(\infty) = 0$, $w(i) = -i$ och $w(0) = i$.

54. Bestäm en funktion som avbildar halvbandet

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0 \text{ och } 0 < \operatorname{Im} z < 1\}$$

konformt på första kvadranten $\{w \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} w > 0 \text{ och } \operatorname{Im} w > 0\}$.

Dirichletproblem

55. Bestäm den elektrostatiska potentialen $V(x, y)$ ovanför en oändlig ledande platta vars tvärsnitt ges av $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$, där delen $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0 \text{ och } -a < x < a\}$ är isolerad från resten och har potentialen $V = 1$, medan $V = 0$ i övrigt på plattan.

Det vill säga: lös Dirichletproblemet

$$\begin{cases} \Delta V = 0 \quad \text{då } -\infty < x < \infty \text{ och } y > 0, \\ V(x,0) = \begin{cases} 1 & \text{då } |x| < a, \\ 0 & \text{då } |x| > a, \end{cases} \\ V(x,y) = \text{begränsad då } -\infty < x < \infty \text{ och } y > 0. \end{cases}$$

56. Härled en formel för elektrostatiska potentialen $V(x, y)$ ovanför halvplanen $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < -1\}$, $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 1\}$ och halvcylindern $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \text{ och } y > 0\}$, om $V = 1$ på halvcylindern och $V = 0$ på planen.

Det vill säga: lös Dirichletproblemet

$$\begin{cases} \Delta V = 0 & \text{då} \quad y > 0 \text{ och } x^2 + y^2 > 1, \\ V(x,0) = 0 & \text{då} \quad x < -1 \text{ och } x > 1, \\ V(x,y) = 1 & \text{då} \quad x^2 + y^2 = 1 \text{ och } y > 0, \\ V(x,y) = \text{begränsad då } y > 0 \text{ och } x^2 + y^2 > 1. \end{cases}$$

57. Bestäm den elektrostatiska potentialen $V(x, y)$ i rummet mellan planen $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$ och $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \pi\}$ om V är lika med 0 på den del av dessa plan där $x > 0$, och V är lika med 1 där $x < 0$.

Det vill säga: lös Dirichletproblemet

$$\begin{cases} \Delta V = 0 & \text{då} \quad -\infty < x < \infty \text{ och } 0 < y < \pi, \\ V(x,\pi) = \begin{cases} 1 & \text{då} \quad x < 0, \\ 0 & \text{då} \quad x > 0, \end{cases} \\ V(x,0) = \begin{cases} 1 & \text{då} \quad x < 0, \\ 0 & \text{då} \quad x > 0, \end{cases} \\ V(x,y) = \text{begränsad då } -\infty < x < \infty \text{ och } 0 < y < \pi. \end{cases}$$

58. Lös följande Dirichletproblem:

$$\begin{cases} \Delta H = 0 & \text{då} \quad 0 < x < \pi/2 \text{ och } y > 0, \\ H(0,y) = 1 & \text{då} \quad y > 0, \\ H(\pi/2, y) = 0 & \text{då} \quad y > 0, \\ H(x,0) = 0 & \text{då} \quad 0 < x < \pi/2, \\ 0 \leq H(x,y) \leq 1 & \text{då} \quad 0 < x < \pi/2 \text{ och } y > 0. \end{cases}$$

59. Bestäm temperaturen $T(x,y)$ i övre halvplanet $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ om $T(x,0) = -1$ då $x < -1$, $T(x,0) = 1$ då $x > 1$ och randstycket $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x < 1 \text{ och } y = 0\}$ är värmeisolerat.

Det vill säga: lös problemet

$$\begin{cases} \Delta T = 0 & \text{då} \quad -\infty < x < \infty \text{ och } y > 0, \\ T(x,0) = \begin{cases} -1 & \text{då} \quad x < -1, \\ +1 & \text{då} \quad x > 1, \end{cases} \\ \frac{\partial T}{\partial y}(x,0) = 0 & \text{då} \quad -1 < x < 1, \\ T(x,y) = \text{begränsad då } -\infty < x < \infty \text{ och } y > 0. \end{cases}$$

60. Lös följande problem:

$$\begin{cases} \Delta H = 0 & \text{då} \quad 0 < y < x, \\ H(x,x) = C_1 & \text{då} \quad x > 0, \\ \frac{\partial H}{\partial y}(x,y) = 0 & \text{då} \quad 0 < x < 1, \\ H(x,0) = C_2 & \text{då} \quad x > 1, \\ H(x,y) = \text{begränsad} & \text{då} \quad 0 < y < x. \end{cases}$$

61. Lös följande Dirichletproblem:

$$\begin{cases} \Delta H = 0 & \text{då} \quad x^2 + y^2 > 1, \\ H(x,y) = C_1 & \text{då} \quad x^2 + y^2 = 1 \text{ och } y > 0, \\ H(x,y) = C_2 & \text{då} \quad x^2 + y^2 = 1 \text{ och } y < 0, \\ H(x,y) = \text{begränsad} & \text{då } x^2 + y^2 > 1. \end{cases}$$

62. Lös följande Dirichletproblem:

$$\begin{cases} \Delta H = 0 & \text{då} \quad x > 0 \text{ och } (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 > \frac{1}{4}, \\ H(0,y) = 0 & \text{då} \quad y \neq 0, \\ H(x,y) = 100 & \text{då} \quad (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4} \text{ och } (x,y) \neq (0,0), \\ H(x,y) = \text{begränsad} & \text{då} \quad x > 0 \text{ och } (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 > \frac{1}{4}. \end{cases}$$

63. Lös följande Dirichletproblem:

$$\begin{cases} \Delta H = 0 & \text{då} \quad x^2 + y^2 < 1 \text{ och } 0 < y < x, \\ H(x,0) = 0 & \text{då} \quad 0 < x < 1, \\ H(x,y) = 2 & \text{då} \quad x^2 + y^2 = 1 \text{ och } 1/\sqrt{2} < x < 1, \\ H(x,y) = 1 & \text{då} \quad y = x \text{ och } 0 < x < 1/\sqrt{2}. \end{cases}$$

Svar

1. (a) $\frac{71-63i}{58}$,

   (b) $\frac{-9+5i}{10}$,

   (c) $\frac{-8+14i}{13}$.

2. (a) $z = 0$,

   (b) $z = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}i$,

   (c) lösning saknas.

3. Detta kallas för parallellogramlagen.

4. Pythagoras $\Longrightarrow$ OK.

5. Likhet då $|\operatorname{Re} z| = |\operatorname{Im} z|$.

6. (a) 1 resp. $-\pi/3$,

   (b) 8 resp. $3\pi/2$,

   (c) $\sqrt{2}/32$ resp. $\pi/4$,

   (d) 1 resp. $\pi/3$,

   (e) 1 resp. $5\pi/6$,

   (f) $2\cos(\phi/2)$ resp. $\phi/2$,

   (g) $4|\cos(\phi/2)\cos\phi|$ resp. $3\phi/2$.

7. Prova med geometriska serien!

8. Titta på lämplig cirkelbåge!

9. (a) $z_n = \sqrt[5]{2}e^{i(\frac{\pi}{10}+\frac{2n\pi}{5})}$ med $n = 0, \pm1, \pm2$.

   (b) $z_n = e^{2n\pi i/5}$ med $n = \pm1, \pm2$.

10. Betrakta beloppen!

11. (e), (f) och (g) är domäner; bara (g) är enkelt sammanhängande.

12. (a): mittpunktsnormalen; (b) och (c): räkna!

13. Tolkning: Funktionen $w = (z-a)/(1-\bar{a}z)$ avbildar insidan av enhetscirkeln på sig själv, avbildar enhetscirkeln på sig själv och avbildar utsidan av enhetscirkeln på sig själv, alltmedan punkten $z = a$ inuti enhetscirkeln flyttas till $w = 0$.

14. (a) Cirkeln $u^2 + (v - a/2)^2 = (a/2)^2$,

    (b) cirkeln $(u - \frac{c}{c^2-r^2})^2 + v^2 = \left(\frac{r}{c^2-r^2}\right)^2$,

    (c) räta linjen $\operatorname{Re} w = \frac{1}{2r}$.

15. z^2 är analytisk i hela planet, medan $(x-iy)/(x^2+y^2) = 1/z$ är analytisk då $z \neq 0$.

16. Med $C =$ en godtycklig reell konstant fås följande svar:

    (a) $f(z) = 1 - (-1+2i)z + iC$,

    (b) $a = -1$ och $f(z) = ze^z + iC$,

    (c) $f(z) = 2\log z + (1-2i)z + iC$,

    (d) är *ej* realdel till en analytisk funktion.

17. Kedjeregeln!

18. $\Delta(g(x) + h(y)) = 0 \iff g''(x) + h''(y) = 0 \iff$ $g''(x) = -h''(y) =$ konstant, och så vidare.

19. $z = \ln|\frac{\pi}{2} + 2n\pi| + i(\pm\frac{\pi}{2} + 2m\pi)$ med plustecken om $n \geq 0$ och minustecken om $n < 0$.

20. (a) Cirklar omkring origo, respektive strålar från origo,

    (b) spiralen $t \mapsto e^t(\cos t + i\sin t)$, där $t = \operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$,

    (c) övre halvplanet $\{w \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} w > 0\}$,

    (d) $\{w \in \mathbb{C} \mid |w| > 1$ och $\beta < \arg w < \gamma$.

21. (a) $\{w \in \mathbb{C} \mid |w| < 1 \text{ och } 0 < \arg w < \pi/2\}$,

    (b) $\{w \in \mathbb{C} \mid |w| > 1 \text{ och } \beta < \arg w < \gamma\}$.

22. (a) $e^{-(\frac{\pi}{4}+2n\pi)}\cos(\ln\sqrt{2}) + i\,e^{-(\frac{\pi}{4}+2n\pi)}\sin(\ln\sqrt{2})$, $\quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$,

(b) $e^{\pm\pi(2m+\frac{1}{2})}\cos(\ln(\pi|2n+\frac{1}{2}|)) + i\, e^{\pm\pi(2m+\frac{1}{2})}\sin(\ln(\pi|2n+\frac{1}{2}|))$ med plustecken om $n \leq -1$ och minustecken om $n \geq 0$, $n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

23. $x = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1+2m}{1+2n}$ med m och n valda så att $x > 0$, det vill säga $m \geq 0$ och $n \leq -1$, eller $m < -1$ och $n \geq 0$.

24. $z = 2^{\frac{1}{2\sqrt{3}}} \cdot e^{\frac{i\pi}{4\sqrt{3}}(1+8n)}$, med $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

25. (a) $z = (n+\frac{1}{2})\pi + \frac{i}{2}\ln 3$,

    (b) $z = i\frac{(4n+1)\pi}{6}$,

    (c) $z = (2n+\frac{1}{2})\pi \pm i\ln(10^3 + \sqrt{10^6 - 1})$,

    (d) $z = 2n\pi \pm i\ln 2$,

    (e) $z = n\pi + i\,(-1)^n \ln(5 + \sqrt{26})$,

    där $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

26. $z = 2n\pi - i\,\ln 2$, där $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

27. $\sin z$ är reell för $\operatorname{Im} z = 0$ och för $\operatorname{Re} z = (n+\frac{1}{2})\pi$, imaginär för $\operatorname{Re} z = n\pi$; $\cos z$ är reell för $\operatorname{Im} z = 0$ och för $\operatorname{Re} z = n\pi$, imaginär för $\operatorname{Re} z = (n+\frac{1}{2})\pi$; $\tan z$ är reell för $\operatorname{Im} z = 0$ och imaginär för $\operatorname{Re} z = \frac{n\pi}{2}$, där $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

28. (a) På den i första kvadranten belägna bågen av ellipsen

$$\left(\frac{u}{\cosh c}\right)^2 + \left(\frac{v}{\sinh c}\right)^2 = 1,$$

    respektive på bågen av samma ellips i högra halvplanet, respektive på hela ellipsen;

    (b) på ellipsen ovan, genomlöpt oändligt många gånger.

29. Bildmängderna blir följande vinkelrum:

    (a) $\{w \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \arg w \leq \pi/2\}$,

    (b) $\{w \in \mathbb{C} \mid -\pi/2 \leq \arg w < 0\}$,

    (c) $\{w \in \mathbb{C} \mid \pi/2 \leq \arg w \leq \pi\}$,

    (d) $\{w \in \mathbb{C} \mid -\pi/2 \leq \arg w \leq -\pi/2\}$.

30. (a) Parabeln $v = \frac{1}{2}(1-u^2)$, där $w = u + iv$,

(b) ellipsen $\left(\frac{u+7}{8}\right)^2 + \left(\frac{v}{4}\right)^2 = 1$,

(c) cirkeln $u^2 + (v - \frac{3}{2})^2 = \frac{1}{4}$,

(d) räta linjen $v = 3$,

(e) räta linjen $u = \frac{1}{2}$.

31. (a) Hyperblerna $x^2 - y^2 = n$ respektive $xy = \frac{n}{2}$, där $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$,

(b) i. vinkelrummet $\{w \in \mathbb{C} \mid 2\phi_1 < \arg w < 2\phi_2\}$,

ii. cirkelsektorn $\{w \in \mathbb{C} \mid 2\phi_1 \leq \arg w \leq 2\phi_2 \text{ och } |w| \leq r^2\}$;

avbildningen är inte konform då $z = 0$,

(c) bildmängderna blir det område i övre halvplanet, som ligger under parabeln $\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u = c^2 - \left(\frac{v}{2c}\right)^2\}$, respektive området till vänster om parabeln $\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u = c^2 - \left(\frac{v}{2c}\right)^2\}$.

32. $w_{\text{slut}}(2) = -i\sqrt{3}$,

33. $w_{\text{slut}}(2) = -i\sqrt{5}$.

34. $w_{\text{slut}}(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

35. (a) Translation med a,

(b) vridning med $\arg a$ och skalning med $|a|$ (d.v.s. förminskning om $|a| < 1$, förstoring om $|a| > 1$),

(c) spegling i enhetscirkeln följd av spegling med avseende på reella axeln.

36. Räkna rakt fram!

37. Uppenbart för (a) och (c); räkning $\Longrightarrow$ sant även för (c).

38. Eftersom man vet att bilden blir en cirkel eller en rät linje räcker det att sätta in tre punkter.

39. $\{w \in \mathbb{C} \mid |w + 1/2| > 1/2, -1 < \operatorname{Re} w < -1/2 \text{ och } \operatorname{Im} w < 0\}$.

40.
$$w = \frac{e^{i\theta}}{2} \cdot \frac{z-1}{z-4}, \qquad \text{där } \theta \text{ är en godtycklig reell konstant.}$$

41. Räkna!

42. Räkna!

43. Till exempel

$$w = \frac{\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2 + 3 - 4i}{\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2 + 3 + 4i}$$

44. Till exempel $R \cdot (2+\sqrt{3})\frac{z-8+4\sqrt{3}}{z-8-4\sqrt{3}}$.

45. På $\{w \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} w \geq 0, w \neq \pm i\}$.

46. Till exempel $w = 4(1-i)\left(\frac{1}{z-2} + \frac{3}{8}\right)$.

47. Arean är lika med $\pi - 2$.

48. Ja, till exempel $w = \frac{z^2+3-4i}{z^2+3+4i}$.

49. Inre radien blir $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

50. Till exempel

$$w = -i\frac{z^{2n} + 2i\,z^n + 1}{z^{2n} - 2i\,z^n + 1}.$$

51. Principalgrenen av $w = i\sqrt{1 - \frac{i}{z}}$.

52. En konform avbildning som gör detta är

$$w = \frac{1 + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{4/3}}{1 - \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{4/3}},$$

där man tar principalgrenen av potensfunktionen.

53. $w = i\,e^{-\pi z}$.

54. $w = i\coth(\pi z/2)$.

55. Den elektrostatiska potentialen då $y > 0$ blir

$$V(x,y) = \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arccot}\frac{x-a}{y} - \operatorname{arccot}\frac{x+a}{y}\right).$$

56. Den elektrostatiska potentialen ges av

$$V(x,y) = \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arccot}\frac{u-1}{v} - \operatorname{arccot}\frac{u+1}{v}\right),$$

där

$$\begin{cases} u = \frac{x}{2}\cdot\frac{x^2+y^2+1}{x^2+y^2}, \\ v = \frac{y}{2}\cdot\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2}. \end{cases}$$

57. Den elektrostatiska potentialen blir

$$V(x,y) = \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arccot}\frac{e^x\cos y - 1}{e^x \sin y} - \operatorname{arccot}\frac{e^x\cos y + 1}{e^x\sin y}\right).$$

58. Får

$$H(x,y) = \frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{\tanh y}{\tan x}\right),$$

som tar värden mellan 0 och 1.

59. Temperaturen blir

$$T(x,y) = \frac{2}{\pi}\arcsin\left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{(x+1)^2+y^2} - \sqrt{(x-1)^2+y^2}\right)\right).$$

60. Får

$$\begin{aligned} H(x,y) =& \frac{2(C_2-C_1)}{\pi}\arcsin\left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{(x^2-y^2+1)^2+4x^2y^2}\right.\right. \\ & \left.\left. -\sqrt{(x^2-y^2-1)^2+4x^2y^2}\right)\right) + C_2. \end{aligned}$$

61. Får

$$H(x,y) = \frac{C_1-C_2}{\pi}\arctan\left(\frac{2y}{x^2+y^2-1}\right) + \frac{C_1+C_2}{2}.$$

62. Får

$$H(x,y) = \frac{100x}{x^2+y^2}.$$

63. Får

$$H(x,y) = \frac{1}{\pi}\arg\left(\left(\frac{z^4+1}{z^4-1}\right)^2 - 1\right) + \frac{2}{\pi}\arg\left(\frac{z^4+1}{z^4-1}\right),$$

där $z = x + iy$.

Ledningar

1. Förläng först med nämnarnas konjugater.

2. (b), (c) T.ex.: konjugera ekvationen, och eliminera $\bar{z}$ sedan.

3. I en parallellogram är summan av diagonalernas kvadrater lika med summan av sidornas kvadrater.

4. Rita triangeln. Pythagoras ger $(z_1 - z_3)(\bar{z}_1 - \bar{z}_3) + (z_2 - z_1)(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) = (z_3 - z_2)(\bar{z}_3 - \bar{z}_2)$, och så vidare.

5. $(|x| - |y|)^2 \geq 0$ ger att $2|x||y| \leq |x|^2 + |y|^2$, vilket i sin tur ger att $(|x| + |y|)^2 \leq 2(|x|^2 + |y|^2)$.

6. (f) Figur eller räkna: $e^{i\phi} + 1 = e^{i\phi/2}(e^{i\phi/2} + e^{-i\phi/2}) = e^{i\phi/2} \cdot \cos(\phi/2)$.
   (g) $1 + z + z^2 + z^3 = (1+z)(1+z^2) = (1+e^{i\phi})(1+e^{2i\phi})$, och så vidare.

7. $\sum_{j=1}^{n} \sin(2j-1)x = \text{Im}\left(\sum_{j=1}^{n} e^{i(2j-1)x}\right) =$
   $\text{Im}\left(e^{ix}(1 + e^{i2x} + \cdots + e^{i(2n-2)x})\right)$; summera sedan detta med hjälp av geometriska serien.

8. $|\phi_1 - \phi_2| =$ längden av den båge på enhetscirkeln som går mellan $e^{i\phi_1}$ och $e^{i\phi_2}$.

9. (b) Geometriska serien visar att $1 + z + \cdots + z^4 = (z^5 - 1)/(z - 1)$ då $z \neq 1$.

10. Får $|z + i|^n = |z - i|^n$, vilket är ekvivalent med att $|z + i| = |z - i|$, så att z ligger på mittpunktsnormalen till punkterna i och $-i$.

11. Rita figur, så blir allt uppenbart.

12. (a) $\{|z - z_1| = |z - z_2|\}$ är mittpunktsnormalen till sträckan mellan z_1 och z_2.
    (b) Kvadrera, sätt in $|z - z_j|^2 = (x - x_j)^2 + (y - y_j)^2$ för $j = 1, 2$ och räkna som besatt.

13. (a) $|z - a|^2 < |1 - \bar{a}z|^2 \iff (z - a)(z - \bar{a}) < (\bar{a}z - 1)(a\bar{z} - 1)$ vilket så småningom ger att $|z| < 1$.
    (b), (c): analogt.

14. (a) $a = \operatorname{Im} z = \operatorname{Im} \frac{1}{w} = \frac{v}{u^2+v^2} \Rightarrow u^2 + (v - a/2)^2 = (a/2)^2$.
(b) $|1/w - c| = r \iff |cw - 1|^2 = r^2 \cdot |w|^2 \iff (cu - 1)^2 + c^2v^2 = r^2u^2 + r^2v^2$, vilket efter förenkling ger cirkeln

$$\left(u - \frac{c}{c^2 - r^2}\right)^2 + v^2 = \left(\frac{r}{c^2 - r^2}\right)^2.$$

(c) $|1/w - r| = r \iff |1 - rw| = r|w| \iff |w - 1/r| = |w - 0| \iff \operatorname{Re} w = \frac{1}{2r}$.

15. Använd Cauchy-Riemannekvationerna!

16. Laplaces ekvation visar att (a) är OK, (b) är OK om $a = -1$, (c) är OK om $(x, y) \neq (0, 0)$, medan (d) inte kan vara realdel till en analytisk funktion. I fallen (a), (b) och (c) bestäms den analytiska funktionen genom okulärbesiktning, eller genom att integrera Cauchy-Riemannekvationerna.

17. Differentiering av $x = r\cos\theta$ och $y = r\sin\theta$ ger

$$\begin{cases} dr = \cos\theta \cdot dx + \sin\theta \cdot dy \\ d\theta = -\frac{\sin\theta}{r} \cdot dx + \frac{\cos\theta}{r} \cdot dy \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \cos\theta \cdot \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial y} = \sin\theta \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}. \end{cases}$$

18. $0 = \Delta u = g''(x) + h''(y) \iff g''(x) = a = -h''(y) \iff g'(x) = ax + b,\ h'(y) = -ay + c$, och så vidare.

19. $e^z = w \Longrightarrow e^w = i \iff w = \log i = i(\pi/2 + 2n\pi) \Longrightarrow z = \log w = \log\left(i(\pi/2 + 2n\pi)\right)$; se på fallen $n \geq 0$ och $n \leq -1$ var för sig.

20. (a) $w = e^x \cdot e^{iy}$, där x respektive y är konstant.
(b) $z = x(1 + i) \Longrightarrow w = e^{x\cdot(1+i)} = e^x \cdot e^{ix}$.
(c), (d): undersök hur randen avbildas!

21. Observera att $z \mapsto iz$ innebär en vridning med vinkeln $\pi/2$. Avbilda de vridna halvbanden som vanligt med exponentialfunktionen.

22. (a) $e^{i\log(1+i)} = e^{i(\ln\sqrt{2} + i(\pi/4 + 2n\pi))}$ och så vidare.
(b) $e^{i\log i} = e^{i\log(i(\pi/2+2n\pi))}$; betrakta fallen $n \geq 0$ och $n \leq -1$ var för sig.

23. $(-x)^{-x} = e^{-x\cdot\log(-x)} = e^{-x(\ln x + i(\pi+2n\pi))} = e^{-x\ln x}\cdot e^{-ix(2n+1)\pi}$ rent imaginär $\Longrightarrow \cos((2n+1)\pi x) = 0$.

24. Logaritmera först till exempel.

25. (a) $2i = \tan z = \frac{1}{i}\frac{e^{2iz}-1}{e^{2iz}+1} \Longrightarrow e^{2iz} = -1/3$, och så vidare.
(b) Ekvationen är ekvivalent med att $e^{2z} = i\cdot e^{-z}$; lös $e^{3z} = i$.
(c) $\sin z = 1000 \iff e^{iz} - e^{-iz} = 2000i \iff$ andragradsekvationen $(e^{iz})^2 - 2000i\, e^{iz} - 1 = 0$; lös denna!
(d) $\cos z = 1,25 \iff e^{iz} + e^{-iz} = 2.5$, och så vidare.
(e) $e^{iz} - e^{-iz} = -10 \Longrightarrow$ med $w = e^{iz}$ att $w^2 - 1 = -10w$. Detta ger att $w = -5 \pm \sqrt{26} = e^{iz}$. Tag log o.s.v. Får två svar beroende på att $-5+\sqrt{26} > 0$, medan $-5-\sqrt{26} < 0$. Facit är faktiskt korrekt – efter kontroll.

26. $2 = \cos z + i\sin z = e^{iz} \iff iz = \ln 2 + i\cdot 2n\pi$

27. $\sin z = \sin x\cdot\cosh y + i\,\cos x\cdot\sinh y$, och så vidare.

28. (a) $u + iv = \sin(x+ic) = \sin x\cdot\cosh c + i\,\cos x\cdot\sinh c$ ger att

$$\sin x = \frac{u}{\cosh c}, \qquad \cos x = \frac{v}{\sinh c};$$

trigonometriska ettan ger sedan att

$$\frac{u^2}{\cosh^2 c} + \frac{v^2}{\sinh^2 c} = 1,$$

där $0 \le u \le \cosh c$. Detta är en del av en ellips.
(b) Ellipsen i (a) genomlöps oändligt många gånger.

29. Rita området i z-planet, och undersök hur randkurvorna avbildas.

30. (a) På C är $y = 1-x$, så $w = u+iv = (x+iy)^2 = (x+i(1-x))^2$, vilket ger att $u = 2x-1$ och $v = 2x-2x^2$. Elimination av x ger till slut en parabel.
(b) $z = 2+e^{i\theta}$ ger att $w = \frac{z(1-2z)}{z-2} = \frac{(2+e^{i\theta})(-3-2e^{i\theta})}{e^{i\theta}}$; hyfsning av detta ger att $u = -(7+8\cos\theta)$ och $v = 4\sin\theta$. Elimination av θ med hjälp av trigettan ger så småningom en ellips.
(c) $w = \frac{iz-2}{z+i} \iff z = \frac{2+iw}{i-w} = \frac{2+i(u+iv)}{i-(u+iv)}$. Imaginärdelen av detta uttryck lika med 0 ger $u^2+v^2-3v+2 = 0$, d.v.s en cirkel.

(d) $w = \frac{2iz-4}{z+i} \iff z = \frac{-iw-4}{w-2i}$; $|z| = 1 \iff |w-4i| = |w-2i|$, som betyder mittpunktsnormalen till punkterna $4i$ och $2i$, d.v.s. räta linjen $\operatorname{Im} w = 3$.
(e) $z = e^{i\theta}$, där $0 < \theta < \pi$, ger att

$$w = \frac{1}{1-e^{i2\theta}} = -\frac{1}{e^{i2\theta}-1} = -\frac{e^{-i\theta}}{e^{i\theta}-e^{-i\theta}} = -\frac{\cos\theta - i\sin\theta}{2i\sin\theta},$$

varför $u = 1/2$ och $v = \cot\theta/2$.

31. (b) $\arg w = 2\arg z$.
(c) Gå på randkurvorna.

32. $w = \sqrt{|1-z^2|}e^{i(\arg(1-z)+\arg(1+z))}$; titta på hur $\arg(1-z)$ och $\arg(1+z)$ varierar.

33. Analogt med föregående tal.

34. $w = z^z = e^{z\log z} = e^{z(\ln|z|+i\arg z)} \Longrightarrow$ OK.

35. Se facit.

36. Rättframt.

37. Uppenbart för translationer, vridningar och skalningar. Räkningar $\Longrightarrow$ sant för $w = 1/z$ också.

38. Vet att bildfigurerna blir cirklar eller räta linjer. I (d) skickas $z = i$ till $w = \infty$, så bilden blir en rät linje.

39. Hörnpunkten $z = 1$ på $\{|z| = 1\}$ och $|z - 1/2| = 1/2$ avbildas på $w = \infty$, så cirkelbågarna avbildas på räta linjer. Eftersom $w = 1/(z-1)$ avbildar reella axeln på sig själv och cirkelbågarna är vinkelräta mot reella z-axeln, så blir bildlinjerna vinkelräta mot reella w-axeln.

$$z = iy = \frac{w+1}{w} = \frac{(u+1)+iv}{u^2+v^2} = \cdots = \frac{u^2+v^2+u-iv}{u^2+v^2}$$

ger att $u^2+v^2+u = 0$, vilket visar att $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \text{ och } 0 \leq y \leq 1\}$ avbildas på en båge av cirkeln $(u-1/2)^2+v^2 = (1/2)^2$.

40. 0 och ∞ är spegelpunkter till $\{|w| = 1\}$; eftersom $z = 1$ skickas till $w = 0$ måste spegelpunkten till $z = 1$ m.a.p. $\{|z-5| = 2\}$ skickas till ∞. Man ser lätt att den senare spegelpunkten ges av $z = 4$, så

$$w = c\,\frac{z-1}{z-4}, \qquad \text{där } c \text{ är en lämlplig konstant.}$$

$z = 7 \Longrightarrow w = 2c$, så för att få rätt radie måste $|c| = 1/2$.

41. Någon punkt z_0 i övre halvplanet måste skickas till $w = 0$, och då måste dess spegelpunkt $\bar{z}_0$ m.a.p. reella axeln skickas till ∞, som är spegelpunkten av 0 m.a.p. enhetscirkeln.

42. z_0 skickas till $w = 0 \Longrightarrow$ spegelpunkten $1/\bar{z}_0$ skickas till ∞, vilket ger Möbiusfunktionen

$$w = c\frac{z-z_0}{z-1/\bar{z}_0} = -c\bar{z}_0\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z} = k\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}.$$

Då $|z| = 1$ är $1/z = \bar{z}$ och $|z-z_0| = |1-z_0/z| = |1-z_0\bar{z}| = |1-\bar{z}_0 z|$, vilket betyder att $|z| = 1 \Longrightarrow |w| = 1$ precis när $|k| = 1$.

43. Skicka t.ex. hörnpunkterna $z = -1$ och $z = 1$ i cirkeltvåhörningen till $w = 0$ respektive $w = \infty$ genom $w_1 = (z+1)/(z-1)$. Kontrollera att bildmängden i w_1-planet blir tredje kvadranten, och avbilda sedan denna på övre halvplanet genom $w_2 = w_1^2$. $z = (1+i)/2$ kommer då att skickas till $w_2 = -3+4i$. Standardavbildningen av övre halvplanet på enhetsskivan ger till slut

$$w = \frac{w_2+3-4i}{w_2+3+4i}.$$

44. De koncentriska cirklarna har 0 och ∞ som gemensamma spegelpunkter, så måste hitta gemensamma spegelpunkter till de excentriska cirklarna, och sedan skicka de senare till 0 respektive ∞. Klart att gemensamma spegelpunkter till $\{|z-1| = 1\}$ och $\{|z| = 4\}$ måste ligga på positiva reella axeln; om de kallas för a och b, så säger spegelpunktsvillkoren att $(a-1)(b-1) = 1$ och $ab = 4^2$. Härur löses a och b till $8 \pm 4\sqrt{3}$, och

$$w = c\frac{z-(8-4\sqrt{3})}{z-(8+4\sqrt{3})}, \qquad \text{där } c = \text{lämplig konstant.}$$

Villkoret $|w(4)| = R$ visar sedan vad c kan vara.

45. Undersök hur randstyckena avbildas. $x = 0$ och y avtagande från $+\infty$ till $-\infty$ ger
$$w = \tan(iy) = \frac{\sin(iy)}{\cos(iy)} = \frac{i \sinh y}{\cosh y}.$$
Härur följer att $u = 0$ och $v = \tanh y = (e^{2y} - 1)/(e^{2y} + 1)$, som avtar från $v = 1$ till $v = -1$.

Då $x = \pi/2$ och $-\infty < y < 0$ respektive $0 < y < \infty$ är
$$w = \tan(\pi/2 + iy) = \frac{\sin(\pi/2 + iy)}{\cos(\pi/2 + iy)} = \frac{\cosh y}{-i \sinh y}.$$
Det vill säga $u = 0$ och $v = (e^{2y} + 1)/(e^{2y} - 1)$. Då y växer från $-\infty$ till 0, avtar v från -1 till $-\infty$; när sedan y växer från 0 till $+\infty$ avtar v från $+\infty$ tiil 1.

SLUTSATS: Imaginära axeln genomlöps uppifrån och ner, och bildområdet blir högra halvplanet.

46. Börja med att skicka cirklarnas gemensamma punkt $z = 2$ till $w_1 = \infty$ genom $w_1 = \frac{1}{2-z}$. Denna funktion avbildar den reella axeln på sig själv, och eftersom cirklarna är ortogonala mot reella axeln i $z = 2$ så avbildas dessa på räta linjer i w_1-planet som är ortogonala mot reella w_1-axeln – d.v.s. parallella med imaginära w_1-axeln. Insättning av punkter visar att bilden av ursprungsområdet blir bandet $\{1/4 < \operatorname{Re} w < 1/2\}$. Translatera detta band så att det kommer att ligga symmetriskt omkring omkring imaginära axeln, vrid med vinkeln $-\pi/4$, och multiplicera med en lämplig reell konstant för att få rätt bredd.

47. Området i xy-planet är $\{-x < y < x \text{ och } x > 0\}$.
$$w = \frac{z-1}{z+1} \iff z = \frac{w+1}{-w+1} \Longrightarrow x + iy = \frac{1 - u^2 - v^2 + 2iv}{(u-1)^2 + v^2}.$$
Så $y = x > 0 \Longrightarrow 1 - u^2 - v^2 = 2v$, med $v > 0$: cirkeldel. På samma sätt ger $y = -x < 0$ cirkeldelen $-1 + u^2 + v^2 = 2v$, med $v < 0$. Sökta arean är två gånger arean av den övre delen, vilken är skillnaden mellan ytan av en cirkelsektor med vinkeln $\pi/2$, radien $\sqrt{2}$ och en triangel vars yta är $\frac{2 \cdot 1}{1} = 1$.

48. Positiva reella och imaginära axlarna utgör randen till den första kvadranten, och denna rand ska avbildas på enhetscirkeln $\{|w| = 1\}$. Så uppgiften är ekvivalent med att avbilda första kvadranten konformt på enhetsskivan så att $w(1 + 2i) = 0$.

    Börja med att avbilda första kvadranten på övre halvplanet genom $w_1 = z^2$. Då blir $w_1(1 + 2i) = -3 + 4i$, med spegelpunkten $-3 - 4i$ m.a.p. reella w_1-axeln. Avbilda sedan vidare till enhetsskivan genom att skicka spegelpunkterna $-3 + 4i$ och $-3 - 4i$ till $w = 0$ respektive $w = \infty$ med en Möbiusfunktion.

49. Jämför med tal 45. De båda cirklarna har $\frac{1}{2}(9 \pm 3\sqrt{5})$ som gemensamma spegelpunkter, varför avbildningen ges av

$$w = c \cdot \frac{z - \frac{1}{2}(9 - 3\sqrt{5})}{z - \frac{1}{2}(9 + 3\sqrt{5})}.$$

    Villkoret $|w(3)| = 1$ ger att $c = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$. Inre radien ges sedan av $|w(0)|$.

50. $w_1 = z^n$ ger övre delen av enhetsskivan, $w_2 = \frac{w_1+1}{w_1-1}$ ger tredje kvadranten, $w_3 = w_2^2$ ger övre halvplanet, och till slut ger $w = \frac{w_3-i}{w_3+i}$ enhetsskivan.

51. Cirkeltvåhörning. Skicka t.ex. $z = i$ till $w = 0$ och $z = 0$ till $w = \infty$ genom $w_1 = \frac{z-i}{z}$. Detta ger w_1-planet uppskuret längs negativa reella axeln. $w_2 = \sqrt{w_1}$ ger högra halvplanet. Vrid med $i = e^{i\pi/2}$ för att få övre halvplanet.

52. Cirklarna skär varandra i ± 1. Skicka 1 till 0 och -1 till ∞ genom $w_1 = \frac{z-1}{z+1}$; bilden av ytterområdet blir då $\{-3\pi/4 < \arg w_1 < 3\pi/4\}$. Fäll ihop vinkelbenen med $w_2 = w_1^{4/3}$, så att du får w_2-planet uppskuret längs negativa reella axeln.

    Nu är det enkelt att avbilda det yttre till slitsen $\{\operatorname{Im} z = 0 \text{ och } -1 \leq \operatorname{Re} \leq 1\}$ på ζ-planet uppskuret längs negativa reella axeln – ty tag $\zeta = \frac{z-1}{z+1}$. Inversen $z = \frac{1+\zeta}{1-\zeta}$ avbildar därför det uppskurna ζ-planet på ytterområdet till slitsen i z-planet.

    Så sätt till slut $w = \frac{1+w_2}{1-w_2}$.

53. $w_1 = -\pi z$ ger halvband i tredje kvadranten, som standardmässigt avbildas på nedre halvan av enhetsskivan genom $w_2 = e^{w_1}$. Vridning med vinkeln $\pi/2$ ger sedan det sökta området; ren tur gör att de tre villkoren automatiskt är uppfyllda.

54. Vrid ett halvt varv och öka bredden till π genom $w_1 = -\pi z$. Fortsätt med $w_2 = e^{w_1}$, så fås nedre halvan av enhetsskivan. Skicka hörnpunkterna till 0 respektive ∞ genom $w_3 = \frac{w_2+1}{w_2-1}$, varvid bilden blir andra kvadranten. Vridning med $-\pi/2$ ger till slut

$$w = -iw_3 = -i\frac{e^{-\pi z}+1}{e^{-\pi z}-1} = i\frac{e^{\pi z/2}+e^{-\pi z/2}}{e^{\pi z/2}-e^{-\pi z/2}} = i\coth\frac{\pi z}{2}.$$

55. Lösningen blir $\frac{1}{\pi}\left(\arg(z-a) - \arg(z+a)\right)$.

56. Joukowskifunktionen $w = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ återför detta problem på det föregående, med $a = 1$.

57. Exponentialfunktionen $w = e^z$ ger samma problem som tal 56 (med $a = 1$), så att $V = \frac{1}{\pi}\left(\arg(w-1) - \arg(w+1)\right)$.

58. $w = \sin z$ avbildar halvbandet på första kvadranten, med $H = 0$ på positiva reella axeln och $H = 1$ på positiva imaginära axeln, varför

$$H = \frac{2}{\pi}\arg w = \frac{2}{\pi}\arctan\frac{\text{Im}\,\sin z}{\text{Re}\,\sin z} = \cdots = \frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{\tanh y}{\tan x}\right).$$

59. Vet att $w = \sin z$ avbildar halvbandet $\{-\pi/2 < \text{Re}\, z < \pi/2,\ \text{Im}\, z > 0\}$ på övre w-halvplanet. Så inversen $w = \arcsin z$ överför vårt problem till att bestämma T så att $\Delta T = 0$ då $\{-\pi/2 < u < \pi/2 \text{ och } v > 0\}$, med $T = -1$ då $\{u = -\pi/2 \text{ och } v > 0\}$, $\partial T/\partial v = 0$ då $\{-\pi/2 < u < \pi/2 \text{ och } v = 0\}$ samt $T = 1$ då $\{u = \pi/2 \text{ och } v > 0\}$.

Ansatsen $T = au+b$ gör att $\partial T/\partial v = 0$ automatiskt; de andra villkoren ger att $a = 2/\pi$ och $b = 0$, så att

$$T = \frac{2}{\pi}\text{Re}\ \arcsin z.$$

Och vad är då Re $\arcsin z$? Jo, $w = \arcsin z \iff z = \sin w$, d.v.s. $x + iy = \sin(u+iv) = \sin u\cosh v + i\cos u \sinh v$, eller

$$\begin{cases} x = \sin u \cosh v, \\ y = \cos u \sinh v, \end{cases}$$

Rättframma räkningar visar nu att $(x+1)^2+y^2 = (\cosh v+\sin u)^2$ och $(x-1)^2+y^2 = (\cosh v - \sin u)^2$, så att

$$\begin{cases} \cosh v + \sin u = \sqrt{(x+1)^2+y^2}, \\ \cosh v - \sin u = \sqrt{(x-1)^2+y^2}. \end{cases}$$

Härur ser man att $2\sin u = \sqrt{(x+1)^2+y^2} - \sqrt{(x-1)^2+y^2}$, vilket till slut visar att

$$u = \operatorname{Re} \arcsin z = \arcsin\left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{(x+1)^2+y^2} - \sqrt{(x-1)^2+y^2}\right)\right).$$

60. Kvadrera för att få första kvadranten, d.v.s. sätt $w_1 = z^2$. Genom $w = \frac{2}{\pi}\arcsin w_1 = \frac{2}{\pi}\arcsin z^2$ (jämför med föregående tal) övergår ursprungsproblemet till följande:

$$\begin{cases} \Delta H = 0 & \text{då } 0 < u < 1 \text{ och } v > 0, \\ H(0,v) = C_1 & \text{då } v > 0, \\ \frac{\partial H}{\partial v}(u,0) = 0 & \text{då } 0 < u < 1, \\ H(1,v) = C_2 & \text{då } v > 0, \end{cases}$$

med lösningen

$$H = \frac{2}{\pi}(C_2 - C_1)\operatorname{Re}\arcsin(z^2) + C_2.$$

Jämfört med föregående tal ska alltså $z = x+iy$ bytas mot $z^2 = x^2-y^2+i\cdot 2xy$ i slutsvaret, d.v.s. x byts mot x^2-y^2 och y mot $2xy$.

61. Räta ut genom att skicka $z=1$ till $w=0$ och $z=-1$ till $w=\infty$ med hjälp av $w=\frac{z-1}{z+1}$; då får vi högra w-halvplanet med $H=C_1$ på positiva v-axeln och $H=C_2$ på negativa v-axeln. Eftersom $\arg(u+iv) = \arctan\frac{v}{u}$ i högra halvplanet, med

$$\arg(u+iv) = \begin{cases} \pi/2 & \text{på positiva } v\text{-axeln}, \\ -\pi/2 & \text{på negativa } v\text{-axeln}, \end{cases}$$

så får man lösningen

$$H = \frac{C_1 - C_2}{\pi}\arctan\left(\frac{v}{u}\right) + \frac{C_1+C_2}{2},$$

där

$$u = \frac{x^2+y^2-1}{(x+1)^2+y^2} \quad \text{och} \quad v = \frac{2y}{(x+1)^2+y^2}.$$

62. Randen består av y-axeln och cirkeln $\{(x-\frac{1}{2})^2+y^2=\frac{1}{4}\}$. Räta ut genom att skicka den gemensamma punkten $z=0$ till $w=\infty$; låt oss också skicka $z=1$ till $w=0$, d.v.s. sätt $w=\frac{z-1}{z}$. Bilden i w-planet blir bandet $\{0<u<1\}$, med $H=100$ då $u=0$ och $H=0$ då $u=1$. Lösningen blir då uppenbarligen

$$H = 100\,(1-u) = 100\left(1-\operatorname{Re}\frac{z-1}{z}\right) = \cdots = \frac{100x}{x^2+y^2}.$$

63. Avbilda på övre delen av enhetsskivan (= cirkeltvåhörning) genom $w_1=z^4$. Om hörnpunkterna -1 och $+1$ skickas till $w_2=0$ respektive $w_2=\infty$ genom $w_2=\frac{w_1+1}{w_1-1}$, så blir bildområdet lika med tredje kvadranten. Vridning med vinkeln $-\pi$, d.v.s. $w_3=e^{-i\pi}w_2=-w_2$ ger första kvadranten, varefter kvadreringen

$$w = w_3^2 = w_2^2 = \left(\frac{z^4+1}{z^4-1}\right)^2$$

ger övre w-halvplanet, med

$$H(u,0) = \begin{cases} 2 & \text{då } u<0, \\ 1 & \text{då } 0<u<1, \\ 0 & \text{då } u>1. \end{cases}$$

Därmed blir

$$\begin{aligned} H =& \frac{1}{\pi}\arg(w-1) + \frac{1}{\pi}\arg w \\ =& \frac{1}{\pi}\arg\left(\left(\frac{z^4+1}{z^4-1}\right)^2-1\right) + \frac{2}{\pi}\arg\left(\frac{z^4+1}{z^4-1}\right). \end{aligned}$$