

Lösningförslag till tentamensskrivning, 2003-05-27 kl. 08.00 - 13.00,
5B1117 Matematik III för E1, Open1 och ME1

1. Konvergenscentrum fås där täljaren blir noll, dvs då $x = 0$.

Sätt $a_n = \frac{n^3}{2^n}$. Konvergensradien R kan bestämmas ur sambandet
$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^3 \frac{2^n}{2^{n+1}} = 1/2, \text{ dvs } R = 2.$$

Intervallens ändpunkter undersöks explicit:

$x = -2$ ger serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3(-2)^n}{2^n}$ vilken divergerar eftersom termerna inte går mot noll.

$x = 2$ ger serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3(2)^n}{2^n}$ vilken också divergerar, av samma anledning.

2. I z -led har vi två begränsningsytor $z = z(x, y)$, nämligen $z = 0$ och $z = xy$. Dessa ytor skär varandra för $x = 0$ och $y = 0$. De fyra "fickor" som bildas mellan dessa två ytor för de respektive kvadranterna i xy -planet är alla obegränsade med oändlig volym. En ändlig kropp kan fås om ett område begränsas utåt av ytterligare villkor. Planet $y = x$ delar "fickorna" i första och tredje kvadranterna i vardera två lika delar, men delarna är fortfarande obegränsade. Planet $x = 1$ delar en av de "halva fickorna" i första kvadranten i en begränsad del och en obegränsad. Alla andra delar är fortfarande obegränsade.

Ovanstående resonemang ger att volymen som skall beräknas kännetecknas av att $0 \leq z \leq xy$, $0 \leq y \leq x$ och $0 \leq x \leq 1$.

Volymen V blir

$$V = \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^x \int_{z=0}^{xy} dx dy dz = \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^x xy dx dy = \int_{x=0}^1 \frac{x^3}{2} dx = 1/8$$

3. a) Parametrisera med vinkeln φ i polära koordinater. Använd $\begin{cases} x = a \cos \varphi \\ y = b \sin \varphi \end{cases}$, där φ går från 0 till 2π . Då fås $dy = b \cos \varphi d\varphi$, och

$$\int_{\partial E} x dy = \int_{\varphi=0}^{2\pi} (a \cos \varphi) (b \cos \varphi d\varphi) = ab \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = \pi ab.$$

b) Greens sats ger

$$\int_{\partial E} x dy = \iint_E dx dy = \{\text{arean av } E\} = \pi ab.$$

4. Parametriseringen ger $\mathbf{r}(u, v) = (u^2 - v^2, 2uv, u)$, vilket ger $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = (2u, 2v, u)$ och $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (-2v, 2u, 0)$.

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 2u & 2v & 1 \\ -2v & 2u & 0 \end{vmatrix} = (-2u, -2v, 4(u^2 + v^2))$$

z -komponenten $4(u^2 + v^2)$ är alltid positiv, d.v.s. minustecknet skall väljas framför integralen för att normalen skall bli rätt riktad.

Vektorfältet \mathbf{F} blir $\mathbf{F}(u, v) = (2uv, -u, 1)$

Allt detta insatt i integralen ger

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\sigma &= - \iint_{S'} (2uv, -u, 1) \cdot (-2u, -2v, 4(u^2 + v^2)) \, du \, dv = \\ &= - \int_{u=0}^2 \int_{v=0}^4 (-4u^2v + 2uv + 4(u^2 + v^2)) \, du \, dv = \dots = -96 \end{aligned}$$

5. Använd nablaräkning:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{v} &= \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \{\boldsymbol{\omega} \text{ är konstant}\} = \nabla_r \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \boldsymbol{\omega}(\nabla_r \cdot \mathbf{r}) - (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla_r)\mathbf{r} = \\ &= \boldsymbol{\omega} \left(\frac{\partial}{\partial x}x + \frac{\partial}{\partial y}y + \frac{\partial}{\partial z}z \right) - (\omega_x \frac{\partial}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial}{\partial y} + \omega_z \frac{\partial}{\partial z})(x, y, z) = 3\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} = 2\boldsymbol{\omega} \end{aligned}$$

6. Den skalära potentialen U bestäms ur vektorekvationen

$$\mathbf{A} = \text{grad } U = \{\text{sfäriska koordinater}\} = \frac{\partial U}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi.$$

Detta ger tre ekvationer:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial r} = A_r = \sin \theta & (1) \\ \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} = A_\theta = \cos \theta & (2) \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} = A_\varphi = -\frac{\sin \varphi}{r \sin \theta} & (3) \end{cases}$$

Integration av ekv (1) med avseende på r ger

$$U(r, \theta, \varphi) = r \sin \theta + f(\theta, \varphi), \quad (4)$$

där f är en godtycklig funktion av θ och φ .

Insättning av (4) i (2) ger $\frac{1}{r}(r \cos \theta + \frac{\partial}{\partial \theta} f(\theta, \varphi)) = \cos \theta$, d.v.s. $\frac{\partial}{\partial \theta} f(\theta, \varphi) = 0$.

Integration av detta m.a.p. θ ger $f(\theta, \varphi) = g(\varphi)$, d.v.s. f beror inte på θ utan bara på φ . Detta sätts in i (4) och ger

$$U(r, \theta, \varphi) = r \sin \theta + g(\varphi), \quad (5)$$

Insättning av (5) i (3) ger nu $\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} g(\varphi) = -\frac{\sin \varphi}{r \sin \theta}$, d.v.s. $g(\varphi) = \cos \varphi + C$, där C är en konstant. Eftersom vi bara söker en potential kan vi välja $C = 0$, och vi får

$$U(r, \theta, \varphi) = r \sin \theta + \cos \varphi,$$

som alltså är en skalär potential till \mathbf{A} .

7. Vi använder en variant av Gauss' sats och får

$$\begin{aligned}
 - \iint_{\partial B} p \hat{\mathbf{n}} d\sigma &= - \iiint_B \text{grad } p dV \\
 - \iiint_B (0, 0, -1) dV &= (0, 0, |B|) = (0, 0, \frac{4\pi}{3} \cdot 3^3) = 36\pi \hat{\mathbf{e}}_z.
 \end{aligned}$$

8. De rätta alternativen är, uppräknade i ordning: 1), 3), 2), 3), 1), 1), 1), 2), 3).

9. a) Om L är en sluten kurva som ej omsluter z -axeln så kan man hitta ett enkelt sammanhängande område som innehåller kurvan och som inte skär z -axeln. I detta område kan man lägga en (orienterad) yta S vars rand är L . (Dessa intuitiva påståenden är egentligen inte självklara och det är ganska svårt att skriva ned rigorösa bevis.)

Stokes' sats ger nu

$$\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{rot } \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\sigma.$$

Beräkning av $\text{rot } \mathbf{A}$ i cylinderkoordinater ger

$$\begin{aligned}
 \text{rot } \mathbf{A} &= \frac{1}{\rho} [0 \cdot \hat{\mathbf{e}}_\rho + 0 \cdot \rho \hat{\mathbf{e}}_\varphi + (\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho \cdot \frac{\sin \varphi}{\rho^2}) - (\frac{\partial}{\partial \varphi}(\frac{\cos \varphi}{\rho^2})) \hat{\mathbf{e}}_z] \\
 &= (-\frac{\sin \varphi}{\rho^2} + \frac{\sin \varphi}{\rho^2}) \frac{\hat{\mathbf{e}}_z}{\rho} = 0.
 \end{aligned}$$

Alltså följer att

$$\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

b) Välj först en standardkurva L_0 som omsluter z -axeln, t.ex. cirkeln $\rho = 1, z = 0$, med φ växande från 0 till 2π . För denna fås (emedan $d\mathbf{r} = 1 \cdot \hat{\mathbf{e}}_\varphi \cdot d\varphi + 0 + 0$ längs L_0 och basvektorerna bildar ett ortonormerat system)

$$\oint_{L_0} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} (\cos \varphi \hat{\mathbf{e}}_\rho + \sin \varphi \hat{\mathbf{e}}_\varphi) \cdot \hat{\mathbf{e}}_\varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi = 0.$$

Låt nu L vara en godtycklig kurva som omsluter z -axeln på samma sätt som L_0 (ett varv i positiv led). Då kan L deformeras kontinuerligt till L_0 utan att skära z -axeln, och under denna deformation genomsveps en yta S vars rand består av L och L_0 . Med hänsyn tagen till orienteringar och med användande av Stokes' sats igen fås

$$\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{rot } \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\sigma + \oint_{L_0} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{L_0} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

Liknande resonemang kan genomföras om L går flera varv runt z -axeln eller går åt andra hållet osv.

En alternativ metod att lösa problemet är att hitta en potential till \mathbf{A} . I cylinderkoordinater fås en sådan ur

$$\frac{\partial U}{\partial \rho} = \frac{\cos \varphi}{\rho^2}, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \varphi} = \frac{\sin \varphi}{\rho^2}, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = 0.$$

Detta ger

$$U = -\frac{\cos \varphi}{\rho} + C.$$

Eftersom denna är väldefinierad utanför z -axeln så följer omedelbart att $\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = 0$. (Om man väljer en punkt $\mathbf{a} \in L$ och tänker sig att L går från \mathbf{a} till \mathbf{a} så fås $\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = U(\mathbf{a}) - U(\mathbf{a}) = 0$.)

10. Integralen är divergent, se Exempel 9.15 a), sid 236 i läroboken.

11. Vi har

$$\operatorname{div}(\Phi \mathbf{B}) = (\operatorname{grad} \Phi) \cdot \mathbf{B} + \Phi \operatorname{div} \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$$

varför Gauss' sats (två gånger) ger

$$\begin{aligned} \iiint_V \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \, dx dy dz &= \iiint_V \operatorname{div}(\Phi \mathbf{B}) \, dx dy dz \\ &= \iint_{\partial V} \Phi \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\sigma = \Phi_0 \iint_{\partial V} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\sigma = \Phi_0 \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{B} \, dx dy dz = 0. \end{aligned}$$

12. Vi använder sfäriska koordinater (r, θ, φ) . Eftersom K är sfäriskt symmetrisk och Dirichletproblemet ifråga har exakt en lösning så måste också denna vara sfäriskt symmetrisk, dvs $U = U(r)$. Uttryckt i sfäriska koordinater blir därmed ekvationen

$$\frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin \theta \frac{\partial U}{\partial r} \right) \right) = 0$$

för $1 < r < 2$. Detta ger

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) &= 0, \\ r^2 \frac{\partial U}{\partial r} &= A \quad (\text{konstant}), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{A}{r^2},$$

$$U = -\frac{A}{r} + B$$

(B konstant). Sätter vi in randvillkoren får vi att A och B ska uppfylla

$$-A + B = 1,$$

$$-\frac{A}{2} + B = 0.$$

Detta ger $A = -2$, $B = -1$ och därmed svaret på uppgiften:

$$U = \frac{2}{r} - 1.$$

13. Låt \mathbf{e} vara en konstant vektor, t.ex. vilken som helst av basvektorerna $\hat{\mathbf{e}}_x$, $\hat{\mathbf{e}}_y$, $\hat{\mathbf{e}}_z$. Med nablakalkyl och Stokes' vanliga sats fås

$$\begin{aligned} -\mathbf{e} \cdot \oint_{\partial S} \mathbf{F} \times d\mathbf{r} &= -\oint_{\partial S} \mathbf{e} \cdot (\mathbf{F} \times d\mathbf{r}) = \oint_{\partial S} (\mathbf{F} \times \mathbf{e}) \cdot d\mathbf{r} \\ &= \iint_S (\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{e})) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\sigma = \iint_S (\hat{\mathbf{n}} \times \nabla) \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{e}) \, d\sigma \\ &= \iint_S \mathbf{e} \cdot ((\hat{\mathbf{n}} \times \nabla) \times \mathbf{F}) \, d\sigma = \mathbf{e} \cdot \iint_S ((\hat{\mathbf{n}} \times \nabla) \times \mathbf{F}) \, d\sigma. \end{aligned}$$

Härav följer

$$\oint_{\partial S} \mathbf{F} \times d\mathbf{r} = -\iint_S ((\hat{\mathbf{n}} \times \nabla) \times \mathbf{F}) \, d\sigma,$$

vilket skulle bevisas.