Institutionen för Matematik , KTH
Avd Matematik

Lösningsförslag till tentamensskrivning, 2003-08-27 kl. 08.00 - 13.00, 5B1117 Matematik III för E1, Open1 och ME1

1. Vi byter koordinater till

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y. \end{cases}$$

I (u, v)-planet blir D en kvadrat med hörn i punkterna $\pm(1, 1)$, $\pm(1, -1)$, alltså kvadraten

$$D' : \quad |u| \leq 1, \ |v| \leq 1.$$

Vi har

$$|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}| = \frac{1}{|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}|} = \frac{1}{2}$$

varför

$$\iint_D (x + y)^2 \, dxdy = \iint_{D'} u^2 \cdot \frac{1}{2} dudv = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} u^2 \, du \int_{-1}^{1} dv = \frac{2}{3}.$$

2. Betrakta y som funktion av x och z, nämligen

$$y = \frac{1}{4}(z^2 - x^2)$$

för $x^2 + z^2 \leq 12$. Med hjälp av en välkänd formel och övergång till polära koordinater får vi då:

$$\text{Arean} = \iint_{x^2+z^2 \leq 12} \sqrt{(\frac{\partial y}{\partial x})^2 + (\frac{\partial y}{\partial z})^2 + 1} \, dxdz$$

$$= \iint \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}z^2 + 1} \, dxdz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{12}} \sqrt{\frac{1}{4}r^2 + 1} \, rdr$$

$$= 2\pi[\frac{4}{3}(\frac{1}{4}r^2 + 1)^{3/2}]_0^{\sqrt{12}} = \frac{56\pi}{3}.$$

3. Vektorfältet har en singularitet i virvelpunkten $(2, 0)$. Utanför denna ger derivering att

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0.$$

För $r < 2$ ger Greens sats därför att

$$\oint_{C_r} Pdx + Qdy = \iint_{D_r} (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) \, dxdy = 0,$$

där D_r är området innanför C_r (som alltså inte innehåller $(2, 0)$).

För $r > 2$ så omsluter C_r virvelpunkten men vi kan ändå använda Greens sats till att deformera C_r (utan att korsa $(2, 0)$) till en kurva som är lättare att integrera över. Vi väljer då en cirkel med centrum i $(2, 0)$, t.ex. $(x - 2)^2 + y^2 = 1$. Parametriserar vi denna enligt

$$\begin{cases} x(t) = 2 + \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases}$$

får vi

$$\oint_{C_r} Pdx + Qdy = \int_0^{2\pi} \frac{-\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \cdot (-\sin t)\, dt + \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \cdot \cos t\, dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

då $r > 2$.

4. Om vi parametriserar ytan med den polära vinkeln φ och z enligt

$$S: \begin{cases} x = \cos\varphi \\ y = \sin\varphi \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 \le \varphi < 2\pi \\ 0 \le z \le 1 \end{cases}$$

så blir $\hat{\mathbf{n}} = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$, $d\sigma = d\varphi dz$ (ty $|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z}| = 1$) och vi får

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, d\sigma = \int_0^1 dz \int_0^{2\pi} (\cos\varphi + z, \sin\varphi, 2z^2) \cdot (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)\, d\varphi$$

$$\int_0^1 dz \int_0^{2\pi} (1 + z\cos\varphi) d\varphi = 2\pi.$$

Man kan också använda Gauss' sats, varvid man får en volymsintegral (ty $\mathbf{div}\,\mathbf{E} \neq 0$) och två ytintegraler (för cylinderns topp och botten).

5. Direkt uträkning ger att $\operatorname{rot} \mathbf{A} = 0$ i hela rummet. Alltså finns en skalär potential U och denna fås ur

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = 2xyz \\ \frac{\partial U}{\partial y} = x^2 z + 1 \\ \frac{\partial U}{\partial z} = x^2 y \end{cases}$$

Första ekvationen ger

$$U = x^2 yz + f(y, z)$$

varav

$$\frac{\partial U}{\partial y} = x^2 z + \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Jämförelse med andra ekvationen ovan ger att $\frac{\partial f}{\partial y} = 1$ dvs att

$$f(y, z) = y + g(z).$$

Sätter vi in det uttryck för U vi nu har i ekvationen för $\frac{\partial U}{\partial z}$ finner vi att $g'(z) = 0$ dvs att $g(z)$ är konstant.

Sammanfattningsvis har vi funnit alla potentialer:

$$U = x^2 yz + y + C$$

där C är en godtycklig konstant.

6. Låt $\mathbf{r} = (x, y, z) = (w, uv, \frac{1}{2}(u^2 - v^2))$. Då är

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = (0, v, u) \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (0, u, -v) \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} = (1, 0, 0) \end{cases}$$

Vi konstaterar att koordinatsystemet verkligen är ortogonalt och vi får skalfaktorerna

$$\begin{cases} h_u = \sqrt{u^2+v^2} \\ h_v = \sqrt{u^2+v^2} \\ h_w = 1 \end{cases}$$

Detta ger (enligt formelbladet)

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{B} &= \frac{1}{u^2+v^2}[\frac{\partial}{\partial u}(\sqrt{u^2+v^2}\,\mathbf{B}_u) + \frac{\partial}{\partial v}(\sqrt{u^2+v^2}\,\mathbf{B}_v) + \frac{\partial}{\partial w}(u^2+v^2)\,\mathbf{B}_w)] \\ &= \frac{1}{u^2+v^2}[\frac{\partial}{\partial u}u + \frac{\partial}{\partial v}v + \frac{\partial}{\partial w}((u^2+v^2)w)] = 1 + \frac{2}{u^2+v^2}. \end{aligned}$$

7. Vi använd cylinderkoordinater

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z. \end{cases}$$

Då övergår K i K' given av $\rho^2 \leq z^2$, $0 \leq z \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, eller

$$K': \quad 0 \leq \rho \leq z \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Vi får

$$\begin{aligned} |K| &= \iiint_{K'} \rho\, d\rho d\varphi dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dz \int_0^z \rho\, d\rho \\ &= 2\pi \int_0^1 \frac{z^2}{2}\, dz = \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

och

$$\iiint_K \mathbf{r}\, dxdydz = \iiint_{K'} (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\, \rho d\rho d\varphi dz$$

$$(0, 0, 2\pi \int_0^1 z\, dz \int_0^z \rho\, d\rho) = (0, 0, \frac{\pi}{4}).$$

Därmed blir tyngdpunkten

$$\mathbf{r}_{TP} = (0, 0, \frac{3}{4}).$$

8. Räknar vi bara på i sfäriska koordinater, använder uttrycket för $d\mathbf{r}$ i formelbladet och använder φ som parameter längs L, så att

$$L: \begin{cases} r = R \\ \theta = 5\pi/6 \quad \text{(speciellt } d\theta = 0) \\ 0 \leq \varphi < 2\pi, \end{cases}$$

så får vi

$$\begin{aligned} \oint_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \sin\varphi\, r\, d\theta + (2 - \cos\varphi)\, R \sin\theta\, d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} (2 - \cos\varphi)\, R \sin\frac{5\pi}{6}\, d\varphi = 2\pi R. \end{aligned}$$

9. Summation av den geometriska serien ger

$$a_n = \frac{1-2^{n+1}}{1-2} = 2^{n+1} - 1.$$

Härav

$$(|a_n|)^{1/n} = (2^{n+1}-1)^{1/n} = 2 \cdot (2 - 2^{-n})^{1/n}$$

som konvergerar mot 2 då $n \to \infty$ Enligt rotkriteriet är därmed konvergensradien $R = 1/2$.

I punkterna $x = \pm\frac{1}{2}$ gäller att

$$|a_n x^n| = (2^{n+1}-1)\frac{1}{2^n} = 2 - 2^{-n}$$

inte går mot noll då $n \to \infty$, så för dessa x kan serien inte konvergera. Konvergensmängden blir därmed det öppna intervallet

$$-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}.$$

10. Man kan antingen parametrisera L och räkna ut direkt eller också använda Stokes' universalsats

$$\oint_L I\, d\mathbf{r} \times \mathbf{B} = I \iint_S (\hat{\mathbf{n}} \times \nabla) \times \mathbf{B}\, d\sigma,$$

där S är en yta som har L som rand (observera att I är konstant).

Vi använder den senare metoden, med

$$S: \; x^2 + y^2 \leq 1, \; z = 0,$$

varvid $\hat{\mathbf{n}} = (0,0,1)$. Detta ger, om vi observerar att $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$,

$$\hat{\mathbf{n}} \times \nabla = -\hat{\mathbf{e}}_x \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{e}}_y \frac{\partial}{\partial x},$$

$$(\hat{\mathbf{n}} \times \nabla) \times \mathbf{B} = \frac{\partial B_z}{\partial x}\hat{\mathbf{e}}_x + \frac{\partial B_z}{\partial y}\hat{\mathbf{e}}_y - (\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y})\hat{\mathbf{e}}_z$$

$$= \frac{\partial B_z}{\partial x}\hat{\mathbf{e}}_x + \frac{\partial B_z}{\partial y}\hat{\mathbf{e}}_y + \frac{\partial B_z}{\partial z}\hat{\mathbf{e}}_z = \operatorname{grad} B_z = (1,2,3).$$

Vi får alltså

$$\mathbf{F} = I \iint_S (1,2,3)\, d\sigma = \pi R^2 I (1,2,3).$$

11. Den del K_R av K som ligger inom cylindern $x^2 + y^2 \leq R^2$ har volymen

$$\iiint_{K_R} dxdydz = \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} (\cosh(x^2+y^2) - \sinh(x^2+y^2))\, dxdy$$

$$= \iint e^{x^2+y^2}\, dxdy = \iint e^{r^2}\, rdrd\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R e^{r^2}\, rdr = 2\pi[-\frac{1}{2}e^{-r^2}]_0^R = \pi(1 - e^{-R^2}) \leq \pi.$$

Det följer att volymen är ändlig och lika med π:

$$|K| = \lim_{R \to \infty} \pi(1 - e^{-R^2}) = \pi.$$

12. Parametrisera enligt

$$\begin{cases} \mathbf{r}_1 = (\cos u, \sin u, 0), & 0 \le u < 2\pi \\ \mathbf{r}_2 = (0, 0, t), & -\infty < t < \infty. \end{cases}$$

Vi har då $d\mathbf{r}_1 = (-\sin u, \cos u, 0)\, du$, $d\mathbf{r}_2 = (0, 0, 1)\, dt$, $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = (\cos u, \sin u, -t)$ och

$$\text{link}\,(L_1, L_2) = \frac{1}{4\pi} \int_{L_1} d\mathbf{r}_1 \cdot \int_{L_2} \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times d\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3}.$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} (-\sin u, \cos u, 0)\, du \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\cos u, \sin u, -t) \times (0, 0, 1,)}{|(\cos u, \sin u, -t)|^3}\, dt$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} (-\sin u, \cos u, 0)\, du \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\sin u, -\cos u, 0)}{(1 + t^2)^{3/2}}\, dt$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} (-\sin^2 u - \cos^2 u)\, du [\frac{t}{(1 + t^2)^{1/2}}]_{-\infty}^{\infty} = 1.$$

13. a) $\mathbf{A}$ är väldefinierad utom (möjligen) då $\sin\theta = 0$, dvs då $\theta = 0$ eller π. Då $\theta = 0$ är emellertid också täljaren lika med noll och om vi förlänger med $1 + \cos\theta$ så ser vi att $\mathbf{A}$ kan skrivas

$$\mathbf{A} = \frac{\sin\theta}{r(1 + \cos\theta)} \hat{\mathbf{e}}_\varphi,$$

som är singulär bara då $\theta = \pi$, dvs bara på negativa z-axeln. (Taylorutveckling eller l'Hopital kan också användas.)

b) Direkt uträkning i sfäriska koordinater ger att

$$\text{rot}\, \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \hat{\mathbf{e}}_r.$$

c) Eftersom D i detta fall inte innehåller några singulära punkter så ger Stokes' sats

$$\int_{\partial D} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D \text{rot}\, \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, d\sigma$$

$$= \iint_D \frac{1}{r^2} \hat{\mathbf{e}}_r \cdot \hat{\mathbf{n}}\, d\sigma = \iint_D d\sigma = |D|$$

(eftersom $r = 1$ och $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{e}}_r$ på D).

d) Om $(0, 0, -1)$ tillhör D så är komplementet D^c till D på sfären fritt från singulariteter. D^c har samma rand som D, men orienteringen blir den omvända. Därmed fås

$$\int_{\partial D} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = -\int_{\partial D^c} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$$

$$= -\iint_{D^c} \text{rot}\, \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, d\sigma = -|D^c| = |D| - 4\pi.$$