

## Lösningar till tentamensskrivning, 2010-04-17, SF 1648, Partiella differentialekvationer för ME och K.

---

1. Origo är en regulär punkt för ekvationen, så det räcker att göra en ansats av typen

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Detta ger, efter sedvanliga räkningar, rekursionsekvationen

$$a_{n+2} = \frac{(n+3)(n-2)}{(n+2)(n+1)} a_n$$

för koefficienterna ( $n \geq 0$ ). De två första koefficienterna,  $a_0$  och  $a_1$ , kan väljas fritt, varvid valen  $a_0 = 1, a_1 = 0$  resp.  $a_0 = 0, a_1 = 1$  ger två linjärt oberoende lösningar:

$$y_1(x) = 1 - \frac{1}{3}x^2 \quad (\text{exakt}),$$

$$y_2(x) = x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{10}x^5 + \dots$$

*Anm:* Differentialekvationen är Legendres ekvation av ordning 2, och  $y_1(x) = -\frac{2}{9}P_2(x)$ , där  $P_n$  betecknar Legendrepolynomet av grad  $n$ .

2. Variabelseparation för differentialekvationen tillsammans med randvillkoren i  $x$ -led (som är homogena), och efterföljande superposition, ger den allmänna lösningen

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{2} \sinh \frac{n\pi y}{2}$$

till den nämnda delen av problemet.

Randvillkoren i  $y$ -led ger sedan värdena på koefficienterna  $B_n$ , och lösningen blir till slut

$$u(x, y) = \frac{5}{\sinh \pi} \sin \frac{2\pi x}{2} \sinh \frac{2\pi y}{2} + \frac{7}{\sinh \frac{3\pi}{2}} \sin \frac{3\pi x}{2} \sinh \frac{3\pi y}{2}.$$

3. Här gör man variabelseparation som vanligt, t.ex.

$$\psi(x, t) = X(x)T(t),$$

för differentialekvationen och randvillkoren. Detta ger

$$i\hbar \frac{T'}{T} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{X''}{X} = k,$$

där  $k$  är konstant. Ekvationen för  $X$  blir

$$X'' + \frac{2\mu k}{\hbar^2} X = 0.$$

Det följer att  $k$  måste vara positiv, närmare bestämt

$$k = \hbar^2 n^2 \pi^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

med tanke på aktuellt värde på  $\mu$  och på randvillkor. Detta ger efter lösning av  $T$ -ekvationen och superposition

$$\psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-i\hbar n^2 \pi^2 t} \sin \frac{n\pi x}{2}.$$

Till slut har vi begynnelsevillkoret att ta hänsyn till. Detta ger lösningen

$$\psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} (1 - \cos \frac{n\pi}{2}) e^{-i\hbar n^2 \pi^2 t} \sin \frac{n\pi x}{2}.$$

4. Vi Laplacetransformerar i  $t$ -led, och sätter

$$U(x, s) = \int_0^{\infty} u(x, t) e^{-st} dt.$$

Differentialekvationen inklusive begynnelsevillkor blir

$$s^2 \cdot U(x, s) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{12}{s^2},$$

eller

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - s^2 \cdot U(x, s) = -\frac{12}{s^2}.$$

Detta är en inhomogen linjär differentialekvation med konstanta koefficienter med  $x$  som oberoende variabel. Den "homogena lösningen" är  $U_{hom} = A(s)e^{sx} + B(s)e^{-sx}$ , och en partikulär lösning är  $U_{part} = 12/s^4$ . Den fullständiga lösningen är därmed

$$U(x, s) = A(s)e^{sx} + B(s)e^{-sx} + \frac{12}{s^4}.$$

Antagandet att  $u(x, t)$  är begränsad då  $x \rightarrow \infty$  leder till slutsatsen att  $A(s) = 0$  för alla  $s$ . Det återstående randvillkoret ger sedan  $U(x, s) = 0$ , varav  $B(s) = -12/s^4$ . Alltså har vi

$$U(x, s) = -\frac{12}{s^4} \cdot e^{-sx} + \frac{12}{s^4}.$$

Eftersom  $\frac{12}{s^4} = \mathcal{L}(2t^3)$  ger inverstransformering av ovanstående lösningen

$$u(x, t) = 2(t^3 - (t-x)^3 H(t-x)) = \begin{cases} 2t^3 & \text{då } t < x, \\ 2(t^3 - (t-x)^3) & \text{då } t > x. \end{cases}$$

5. a) Ekvationen är av Eulertyp. Antingen gör man ansatsen  $R(r) = r^\alpha$  (eller en motsvarande fullständig potensserieansats) eller så gör man substitutionen  $r = e^t$ . Man får indexrötter, eller karakteristiska rötter,  $\alpha = n$  och  $\alpha = -n - 1$ , och den allmänna lösningen blir

$$R(r) = Ar^n + Br^{-n-1}.$$

Här måste  $B = 0$  på grund av kravet då  $r \rightarrow 0$ .

- b) Insättning av  $Y = \Theta\Phi$  i ekvationen  $\Delta Y = \lambda Y$  ger (med  $\lambda = -n(n+1)$ )

$$\frac{\Theta''}{\Theta} + \cot \theta \frac{\Theta'}{\Theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\Phi''}{\Phi} = -n(n+1).$$

Efter multiplikation med  $\sin^2 \theta$  inser man att  $\Phi''/\Phi$  måste vara konstant, och med tanke på att  $\Phi(\varphi)$  ska vara  $2\pi$ -periodisk så måste denna konstant vara på formen  $-m^2$  för något heltal  $m$ ; lösningarna för  $\Phi$  blir då

$$\Phi(\varphi) = Ce^{im\varphi}$$

(eller, på reell form,  $\Phi(\varphi) = A \cos m\varphi + B \sin m\varphi$ ; i det senare fallet räcker det att använda heltal  $m \geq 0$ , i den komplexa framställningen måste man använda både positiva och negativa heltal  $m$ ). Man kan visa att endast värden på  $m$  i intervallet  $-n \leq m \leq n$  är aktuella. Motiveringen för detta påstående får anses ligga utanför ramen för tentan.

Ekvationen för  $\Theta$  blir nu

$$\Theta'' + \cot \theta \Theta' + \left[ n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] \Theta = 0.$$

- c) Skriv  $y(s) = \Theta(\theta)$  med  $s = \cos \theta$ . Med hjälp av kedjeregeln fås

$$\Theta' = -\sin \theta y',$$

$$\Theta'' = \sin^2 \theta y'' - \cos \theta y' = (1 - s^2) y'' - sy'.$$

Insättning i ekvationen för  $\Theta$  ger

$$(1 - s^2) y'' - 2sy' + \left[ n(n+1) - \frac{m^2}{1 - s^2} \right] y = 0,$$

vilket är Legendres associerade differentialekvation. Lösningarna (de associerade Legendrefunktionerna) betecknas  $y = P_n^m(s)$ . Vi får därmed lösningarna till  $\Theta$ -ekvationen:

$$\Theta(\theta) = P_n^m(\cos \theta)$$

för  $n = 0, 1, 2, \dots, -n \leq m \leq n$ .

- d) Den allmänna lösningen till Laplaces ekvation blir alltså

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n A_{nm} r^n P_n^m(\cos \theta) e^{im\varphi}.$$