Institutionen fï¿½r matematik, KTH,
Björn Gustafsson

Lösningar till tentamensskrivning, 2012-03-15, SF1648, Partiella differentialekvationer.

Anm: Vissa beräkningsdetaljer har utelämnats i nedanstående lösningar. Inlämnade tentamenslösningar bör dock innehålla alla detaljer.

---

1. Sök först icke-triviala lösningar till differentialekvationen och randvillkoren på produktform:

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Insättning i ekvationen ger, efter division med $X(x)T(t)$, att

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = 4\frac{X''(x)}{X(x)} = \text{konstant} = 4k.$$

För X fås, tillsammans med randvillkoren, (Sturm-Liouville)-problemet

$$X'' - kX = 0 \qquad (0 < x < \pi),$$

$$X(0) = X(\pi) = 0.$$

Om $k \geq 0$ så visar en enkel undersökning att den enda lösningen är $X = 0$, så vi kan anta att $k = -\lambda^2 < 0$, för något $\lambda > 0$. Då fås

$$X(x) = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x),$$

varvid $X(0) = 0$ ger $A = 0$, och sedan $X(\pi) = 0$ att $\lambda\pi$ måste vara ett nollställe till sinus. Alltså: $\lambda = n$ $(n = 1, 2, \dots)$, $k = -n^2$ och $X(x) = B\sin nx$.

Ekvationen för T blir nu $T'' + 4n^2T = 0$, med lösningar

$$T(t) = a\cos 2nt + b\sin 2nt.$$

Vi fann alltså produktlösningarna

$$u(x,t) = B\sin nx \cdot (a\cos 2nt + b\sin 2nt), \qquad n = 1, 2, \dots.$$

Superposition av dessa och omdöpning av konstanterna ger

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx \cos 2nt + b_n \sin nx \sin 2nt.$$

Nu ska begynnelsevillkoren satisfieras. Vi har

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} 2nb_n \sin nx,$$

så jämförelse med de givna begynnelsevillkoren ger direkt att

$$a_3 = 5, \qquad a_n = 0 \quad \text{för} \quad n \neq 3,$$

$$2 \cdot 2 \cdot b_2 = 4, \qquad 2nb_n = 0 \quad \text{för} \quad n \neq 2.$$

Vi får därmed svaret på uppgiften:

$$u(x,t) = 5 \sin 3x \cos 6t + \sin 2x \sin 4t.$$

---

2. Låt

$$\hat{u}(\omega,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) e^{-i\omega x}\, dx.$$

Enligt formelsamling och givet initialvärde gäller då

$$\hat{u}(\omega,0) = \frac{3}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\omega^2}{4}}.$$

Fouriertransformering av differentialekvationen ger

$$4\frac{\partial \hat{u}(\omega,t)}{\partial t} = (i\omega)^2 \hat{u}(\omega,t).$$

För varje fixt ω är detta en linjär differentialekvation i t med konstanta koefficienter. Den allmän lösningen är

$$\hat{u}(\omega,t) = A(\omega) e^{-\frac{\omega^2}{4}t}.$$

Insättning av $t = 0$ ger att

$$A(\omega) = \hat{u}(\omega,0) = \frac{3}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\omega^2}{4}},$$

och vi får

$$\hat{u}(\omega,t) = \frac{3}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\omega^2}{4}} e^{-\frac{\omega^2}{4}t} = \frac{3}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\omega^2(t+1)}{4}}.$$

Efter tillbakatransformering fås svaret

$$u(x,t) = \frac{3}{\sqrt{t+1}} e^{-\frac{x^2}{t+1}}.$$

---

3. a) Ansätt

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Det ger

$$y'' - xy' + \lambda y = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n-\lambda)a_n]x^n.$$

Detta ska vara identiskt lika med noll, vilket ger rekursionsformeln

$$a_{n+2} = \frac{n-\lambda}{(n+2)(n+1)} a_n \qquad n = 0, 1, 2, \dots.$$

Väljer vi t.ex. $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ (dessa två koefficienter kan alltid väljas fritt i en regulär ekvation) får vi en serie med bara jämna potenser av x:

$$y(x) = 1 - \frac{\lambda}{2}x^2 + \frac{\lambda(\lambda-2)}{24}x^4 + \dots$$

b) För att skriva ekvationen på Sturm-Liouville-form så förlänger vi med faktorn

$$e^{\int(-x)dx} = e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Det ger

$$(e^{-\frac{x^2}{2}} y')' + \lambda e^{-\frac{x^2}{2}} y = 0.$$

Alltså har vi

$$p(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad q(x) = 0, \quad w(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

c) Rekursionsformeln i a) visar att om λ är ett heltal ≥ 0 så blir $a_{\lambda+2} = a_{\lambda+4} = \cdots = 0$. Det följer att om λ är ett jämnt heltal så blir $y(x)$ ett polynom om man börjar rekursionen med $a_0 = 1$, $a_1 = 0$. Om λ är udda väljer man istället $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ och får samma slutsats. Egenvärdena är alltså $\lambda = 0, 1, 2, \dots$.

---

4. För att göra sedvanlig variabelseparation behöver vi ha homogena randvärden på mantelytan. Detta åstadkommes genom att skriva

$$V(\rho, z) = U(\rho, z) + 7,$$

där då U ska lösa problemet

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \quad (0 < \rho < 1,\ 0 < z < 3),$$

$$U(1, z) = 0 \quad (0 < z < 3),$$

$$U(\rho, 0) = 0 \quad (0 < \rho < 1),$$

$$U(\rho, 3) = 20 \quad (0 < \rho < 1).$$

För differentialekvationen plus randvillkoren på mantelytan gör vi här produktansatsen

$$U(\rho, z) = R(\rho)Z(z).$$

Differentialekvationen blir

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{\rho}\frac{R'}{R} + \frac{Z''}{Z} = 0,$$

vilket ger de två ordinära differentialekvationerna

$$\rho R'' + R' + k\rho R = 0 \quad (0 < \rho < 1),$$
$$Z'' - kZ = 0 \quad (0 < z < 3),$$

där k är en separationskonstant. Den första ekvationen är Bessels differentialekvation av ordning noll, på parametrisk form. Eftersom $\lim_{\rho\to 0} R(\rho)$ ska vara ändligt så ger standardresonemang att k måste vara positivt och att lösningen är på formen

$$R(\rho) = AJ_0(\sqrt{k}\rho).$$

Randvillkoret $R(1) = 0$ ger sedan att

$$k = \alpha_n^2, \quad n = 1, 2, \dots,$$

där $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots$ är nollställena till J_0.

Dessa värden på k insatta i ekvationen för Z ger att

$$Z(z) = be^{\alpha_n z} + ce^{-\alpha_n z} = B\cosh\alpha_n z + C\sinh\alpha_n z.$$

Det senare uttrycket är enklare att använda i detta fall, ty man kan direkt använda det homogena randvillkoret $U(\rho, 0) = 0$, som ger $Z(0) = 0$ och därmed $B = 0$.

Superposition av de nu erhållna produktlösningarna ger (efter omdöpning av konstanter)

$$U(\rho, z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\alpha_n\rho)\sinh\alpha_n z.$$

Randvillkoret på toppytan säger att $U(\rho, 3) = 20$, medan serien i högerledet med $z = 3$ blir en ren Besselserie med koefficienter $A_n \sinh 3\alpha_n$. Detta ger, med tanke på Besselfunktionernas ortogonalitetsegenskaper,

$$A_n \sinh 3\alpha_n = \frac{\int_0^1 20J_0(\alpha_n\rho)\rho d\rho}{\int_0^1 J_0(\alpha_n\rho)^2\rho d\rho}.$$

Integralerna i högerledet kan beräknas om man använder att $\frac{d}{dx}(xJ_1(x)) = xJ_0(x)$. Resultatet blir

$$A_n \sinh 3\alpha_n = \frac{40}{\alpha_n J_1(\alpha_n)}.$$

Svaret på hela uppgiften blir därmed

$$V(\rho, z) = 7 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{40}{\alpha_n J_1(\alpha_n)\sinh 3\alpha_n} J_0(\alpha_n\rho)\sinh\alpha_n z.$$

---

5. a) Här kan man använda ortogonalitetsrelationerna

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n), \\ \frac{2}{2m+1} & (m = n), \end{cases}$$

och göra en vanlig ortogonalutveckling, alternativt bara ansätta koefficienter och identifiera. Svaret blir i vilket fall som helst

$$f(x) = \frac{4}{3}P_0(x) + P_1(x) + \frac{2}{3}P_2(x).$$

b) Ansatsen $\psi(\theta,t)=\Theta(\theta)T(t)$ ger

$$\frac{2\mu}{i\hbar}\frac{T'}{T}=\frac{\Theta''}{\Theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\Theta'}{\Theta}=k,$$

k konstant. Ekvationen för T har den allmänna lösningen

$$T(t)=Ae^{\frac{i\hbar kt}{2\mu}}.$$

c) Ekvationen för Θ är

$$\Theta''+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\Theta'-k\Theta=0.$$

Med $s=\cos\theta$ och omvandling av ovanstående θ-derivator till s-derivator med hjälp av kedjeregeln övergår ekvationen i

$$(1-s^2)\frac{d^2\Theta}{ds^2}-2s\frac{d\Theta}{ds}-k\Theta=0.$$

Detta är Legendres differentialekvation, för vilken man vet att de enda fungerande värdena på k är

$$k=-n(n+1),\quad n=0,1,2,\ldots.$$

Övriga värden på k ger enbart lösningar som är alltför singulära i $s=\pm1$. Den användbara lösningen i fallet $k=-n(n+1)$ är Legendre-polynomet $P_n(s)$.

d) Sammanställning av ovanstående och superposition ger den allmänna lösningen

$$\psi(\theta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}A_ne^{-\frac{i\hbar tn(n+1)}{2\mu}}P_n(\cos\theta).$$

Begynnelsevillkoret ger att koefficienterna A_n helt enkelt ska vara de Legendre-koefficienter som beräknades i a). Detta ger den slutliga lösningen

$$\psi(\theta,t)=\frac{4}{3}P_0(\cos\theta)+e^{-\frac{i\hbar t}{\mu}}P_1(\cos\theta)+\frac{2}{3}e^{-\frac{3i\hbar t}{\mu}}P_2(\cos\theta)$$

$$=\frac{4}{3}+e^{-\frac{i\hbar t}{\mu}}\cos\theta+\frac{1}{3}e^{-\frac{3i\hbar t}{\mu}}(3\cos^2\theta-1).$$