Institutionen för matematik, KTH,
Björn Gustafsson

Lösningar till tentamensskrivning, 2007-12-21.
5B1215 Matematiska metoder för ME, del 1: Komplexa funktioner

---

Anm: Lösningarna är mer kortfattade än vad inlämnade tentamenslösningar bör vara. Många enkla räkningar utelämnats.

1. Direkta räkningar ger svaren

$$\operatorname{grad} U = 3r^2 \sin^2\theta\, \boldsymbol{e}_r + 2r^2 \sin\theta \cos\theta\, \boldsymbol{e}_\theta,$$

$$\operatorname{div}\, \operatorname{grad} U = 10r \sin^2\theta + 4r\cos^2\theta = 2r(2 + 3\sin^2\theta);$$

och rot grad $U = 0$ för alla skalärfält U.

2. Man kan antingen integrera direkt eller använda Stokes sats. Med Stokes får man att beräkna linjeintegralen av $\boldsymbol{F}$ längs

$$\partial S : \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ z = 1, \end{cases}$$

som parametriseras av

$$\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t, \\ z = 1, \end{cases}$$

där $0 \le t \le 2\pi$ och växer i omloppsriktningen. Alltså,

$$\boldsymbol{r}(t) = (2\cos t, 2\sin t, 1)$$

vilket ger

$$\iint_S \operatorname{rot} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \int_{\partial S} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$$

$$= \int_0^{2\pi} (2\sin t \cdot (-2\sin t) + 2\cos t + 0)dt = -4\pi.$$

3. Ekvationen $-\Delta U = \rho$ blir i sfäriska koordinater, och vid endast radiellt beroende,

$$-\frac{1}{r^2}(r^2 U'(r))' = \frac{6}{r^2}.$$

Detta ger

$$r^2 U'(r) = \frac{3}{r^2} + A,$$

$$U(r) = -\frac{1}{r^3} + \frac{A}{r} + B,$$

där A och B är godtyckliga konstanter.

4. a) Räkningarna förenklas om man använder att $2 \sin x \cos x = \sin 2x$. Man får då omedelbart att

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

b) Cauchy-Riemanns ekvationer för v ger först att

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -2e^{2y \sin 2x},$$

varav

$$v = e^{2y} \cos 2x + C(y),$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 2e^{2y} \cos 2x + C'(y).$$

Detta ska å andra sidan vara $= \frac{\partial u}{\partial x} = 2e^{2y} \cos 2x$, vilket ger $C'(y) = 0$, dvs. $C(y) = C$ (konstant). Alltså blir

$$v(x, y) = e^{2y} \cos 2x + C.$$

c) Väljer vi $C = 0$ får vi

$$f(z) = e^{2y} \sin 2x + ie^{2y} \cos 2x = \cdots = ie^{-2iz}.$$

5. Vi noterar först att punkten $z = 3$ ligger på cirkeln och att $z = 1$ och 4 (samt t.ex. $z = \infty$ och 5) är spegelpunktspar.

a) Man ser omedelbart (genom insättning) att bildkurvan blir cirkeln

$$|w| = 6.$$

b) Punkterna $z = 3$, 1 och 4 avbildas på $w = \infty$, -6 resp. 12. Det följer att bildkurvan är den räta linjen

$$\operatorname{Re} w = 3.$$

c) Punkterna $z = 3$, 1 och 4 avbildas på $w = 6$, ∞ resp. 4. Det följer att bildkurvan är cirkeln

$$|w - 4| = 2.$$

---

6. a) Man finner (en enkel uträkning i cylinderkoordinater) att $\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = 0$ utanför z-axeln. Alltså har $\boldsymbol{v}$ en skalär potential i varje enkelt sammanhängande delområde av området utanför z-axeln.

b) Likaså finner man att $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$ utanför z-axeln. Av detta följer att $\boldsymbol{v}$ en vektorpotential utanför z-axeln. (Något enkelt sammanhängande delområde behövs ej här.)

c) Enligt a) och b) finns skalärfält ϕ och vektorfält $\boldsymbol{A}$ så att $\boldsymbol{v} = \operatorname{grad} \phi = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}$. ϕ är lättast att bestämma: sätter man upp ekvationerna för komponenterna (i cylinderkoordinater) så finner man snabbt potentialen

$$\phi(\rho, \varphi, z) = \varphi + C,$$

där C godtycklig konstant. Här är φ är den polära vinkeln, som växer med 2π då man går runt z-axeln. För att få en enkelvärd potential måste man alltså välja ett definitionsområde som inte innehåller hela varv runt z-axeln, exempelvis området definierat av $0 < \varphi < 2\pi$.

Vektorpotentialen $\boldsymbol{A}$ är svårare att beräkna (generellt sett), och blir långt ifrån entydigt bestämd. I det aktuella fallet kan man dock på olika sätt räkna sig fram till

$$\boldsymbol{A}(\rho, \varphi, z) = -\ln \rho \, \boldsymbol{e}_z + \boldsymbol{B},$$

där $\boldsymbol{B}$ är ett godtyckligt vektorfält med $\operatorname{rot} \boldsymbol{B} = 0$, t.ex. $\boldsymbol{B} = 0$.

7. Man kan integrera direkt eller använda Stokes sats. Om man integrerar direkt så försvinner f genom att

$$\int_0^{2\pi} (f(t)\cos t + f'(t)\sin t)dt = \int_0^{2\pi} \frac{d}{dt}(f(t)\sin t)dt = 0.$$

Om man vill använda Stokes sats så räknar man först ut att

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{A} = (0, 0, 2x - 1),$$

speciellt att $\operatorname{rot} \boldsymbol{A}$ är parallell med $\boldsymbol{e}_z$. Integrationskurvan går ett varv runt cylindern $x^2 + y^2 = 1$, och man kan se den som randkurvan till en yta som består dels av ett horisonellt snitt genom cylindern, t.ex.

$$S: \quad z = 0, \quad x^2 + y^2 \leq 1,$$

dels av ett ytstycke M beläget på mantelytan av cylindern. Stokes sats ger då

$$\int_C \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r} = \iint_S \operatorname{rot} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n} dS + \iint_M \operatorname{rot} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n} dS.$$

$$= \iint_S \operatorname{rot} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n} dS + 0 = \iint_{x^2+y^2\leq 1} (2x - 1)\, dxdy = -\pi.$$

8. a) Med

$$\boldsymbol{r} = (uv\cos w, uv\sin w, \frac{1}{2}(u^2 - v^2))$$

fås

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} = (v\cos w, v\sin w, u),$$
$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = (u\cos w, u\sin w, -v),$$
$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w} = (-uv\sin w, uv\cos w, 0).$$

Man kontrollerar lätt att dessa vektorer är ortogonala.

b) Likaså finner man lätt att skalfaktorerna (längderna av ovanstående vektorer) blir

$$h_u = \sqrt{u^2 + v^2}, \quad h_v = \sqrt{u^2 + v^2}, \quad h_w = uv,$$

vilket ger

$$\boldsymbol{e}_u = (\frac{v\cos w}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \frac{v\sin w}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}),$$
$$\boldsymbol{e}_u = (\frac{u\cos w}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \frac{u\sin w}{\sqrt{u^2 + v^2}}, -\frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}})$$
$$\boldsymbol{e}_w = (-\sin w, \cos w, 0)$$

c) Man finner (t.ex. genom att använda att $A_u = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{e}_u$ osv.) att

$$\boldsymbol{A} = \frac{u\sqrt{u^2+v^2}}{2}\boldsymbol{e}_u + \frac{v\sqrt{u^2+v^2}}{2}\boldsymbol{e}_v$$

9. a) Ekvationen blir $e^{2iz} = 1$, varav

$$z = \frac{1}{2i}\log 1 = \frac{1}{2i}(0 + 2\pi i n) = n\pi,$$

n godtyckligt heltal.

b) Ekvationen blir $e^{z\ln 2} = -1$, varav

$$z = \frac{1}{\ln 2}\log(-1) = \frac{1}{\ln 2}(0 + i(\pi + 2\pi n)) = \frac{(2n+1)\pi i}{\ln 2},$$

n godtyckligt heltal.

10. a) Först kan man notera att

$$\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y.$$

På L_1 är därmed $w = \cos z = -\cosh y$, dvs. är reellt och växer från $-\infty$ till -1 då man går längs L_1 så att området D ligger till vänster (y avtar).

På L_2 blir $w = \cos x$, som växer från -1 till $+1$ längs reella axeln då L_2 orienteras på motsvarande sätt.

På L_3, slutligen, är $w = \cosh y$, dvs. är reellt och växer från $+1$ till $+\infty$.

b) Den orienterade randen till D utgörs av (i ordning) L_1, L_2 och L_3, riktade så att D ligger till vänster. Den avbildas enligt a) på realaxeln i w-planet med dess vanliga positiva riktning. Det följer att D avbildas på området som ligger till vänster om realaxeln, dvs. övre halvplanet H. Ytterligare analys (som ligger utanför vad som krävs i uppgiften) visar att $w = \cos z$ avbildar D en-entyding på H och att avbildningen är överallt konform (dvs. att derivatan av $\cos z$ aldrig är lika med noll i D; detta följer i och för sig av svaret på uppgift 9 a)).

c) Man kan använda Poissons integralformel eller göra en ansats av typen

$$V(u,v) = A\arg(w+1) + B\arg(w-1) + C,$$

där A, B och C är konstanter. V är då harmonisk, och V uppfyller randvillkoren om (och endast om)

$$\begin{cases} A\pi + B\pi + C = 5, \\ B\pi + C = 4, \\ C = 1. \end{cases}$$

Detta ger

$$V(u,v) = \frac{1}{\pi}\arg(w+1) + \frac{3}{\pi}\arg(w-1) + 1 = \frac{1}{\pi}\operatorname{arccot}\frac{u+1}{v} + \frac{3}{\pi}\operatorname{arccot}\frac{u-1}{v} + 1.$$

d) Lösningen fås genom att föra över ovanstående lösning V till z-planet med hjälp av $w = \cos z$. Detta ger

$$\begin{aligned} U(x,y) &= V(u,v) = V(\cos x\cosh y, -\sin x \sinh y) \\ &= \frac{1}{\pi}\operatorname{arccot}\frac{\cos x\cosh y + 1}{-\sin x\sinh y} + \frac{3}{\pi}\operatorname{arccot}\frac{\cos x\cosh y - 1}{-\sin x\sinh y} + 1. \end{aligned}$$