Institutionen för matematik, KTH,
Björn Gustafsson

Lösningar till tentamensskrivning, 2008-12-19.
SF1649 Vektoranalys och komplexa funktioner för ME

Anm: Lösningarna är mer kortfattade än vad inlämnade tentamenslösningar bör vara. Många enkla räkningar utelämnats.

1. a) Gradienten till T i punkten $(1,1,1)$ blir $(3,6,2)$. Denna vektor har längd 7 varför den sökta enhetsvektorn blir

$$\boldsymbol{e} = \frac{1}{7}(3,6,2).$$

   b) Det som efterfrågas är derivatan $\frac{d}{dt}\big|_{t=0} T(\boldsymbol{r}(t))$, där $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ uppfyller $\boldsymbol{r}(0) = (1,1,1)$, $\boldsymbol{r}'(0) = (2,1,-2)$ (t tiden). Kedjeregeln ger att svaret blir

$$(3,6,2)\cdot(2,1,-2) = 8.$$

2. Vi skriver

$$\boldsymbol{r}(u,v) = (u, 2uv, u^2 - v^2),$$

varav

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} &= (1, 2v, 2u),\\ \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} &= (0, 2u, -2v),\\ \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} &= (-4(u^2+v^2), 2v, 2u),\\ \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(u,v)) &= (1, -u, 2uv).\end{aligned}$$

Eftersom x-komponenten för kryssprodukten ovan är negativ så blir

$$\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = -\int_0^3\int_0^2 (1,-u,2uv)\cdot(-4(u^2+v^2), 2v, 2u)\,dudv = \cdots = 74.$$

3. Vektorfältet är regulärt i cylindern, så vi kan använda Gauss sats. Med hjälp av välkända formler i cylinderkoordinater fås

$$\operatorname{div}\boldsymbol{F} = \rho(3+\sin\varphi),$$

varav

$$\begin{aligned}\iint_{\partial V} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,dS &= \iiint_V \operatorname{div}\boldsymbol{F}\,dV\\ &= \int_0^1 \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho(3+\sin\varphi)dz = \cdots = 4\pi.\end{aligned}$$

4. En enkel räkning ger vid handen att $\Delta v = 0$. Realdelen u till den sökta analytiska funktionen ska, tillsammans med v, uppfylla Cauchy-Riemanns ekvationer. Dessa blir

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 2x + e^x \cos y, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -(2y + e^x \sin y). \end{cases}$$

Första ekvationen ger att $u(x, y) = x^2 + e^x \cos y + A(y)$, $A(y)$ en tillsvidare okänd funktion. Derivering av detta med avseende på y och jämförelse med den andra ekvationen ger att $A'(y) = -2y$, varav $A(y) = -y^2 + B$, B konstant. Alltså får vi

$$u(x, y) = x^2 + e^x \cos y - y^2 + B,$$

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = x^2 - y^2 + 2ixy + e^x(\cos y + i \sin y) + B = z^2 + e^z + B.$$

5. a) Eftersom L har ekvationen $x = y$ så inses lätt att spegelpunkten till $3 + 4i$ är $4 + 3i$. Man kan kontrollera detta t.ex. genom att konstatera att den räta linjen från $3 + 4i$ till $4 + 3i$ skär L under rät vinkel, och att skärningspunkten delar linjen i två lika delar (mittpunkten $\frac{1}{2}(3 + 4i + (4 + 3i))$ ligger på L).

   b) Avbildningen måste bli en Möbiustransformation. Om punkten $z = 3 + 4i$, som tillhör H, ska avbildas på $w = 0$ (D:s medelpunkt) så måste spegelpunkten $z = 4 + 3i$ avbildas på $w = \infty$. Detta ger att

$$w = k\,\frac{z - (3 + 4i)}{z - (4 + 3i)}$$

   för något $k \neq 0$. Sätter vi in t.ex. $z = 0$, som ligger på $L = \partial H$, så ska bildpunkten ligga på ∂D, dvs. uppfylla $|w| = 2$. Detta ger

$$2 = |w| = |k|\,\left|\frac{0 - (3 + 4i)}{0 - (4 + 3i)}\right| = |k|.$$

   Varje sådant k duger, alltså blir $k = 2e^{i\alpha}$, α ett godtyckligt reellt tal. Det allmännaste svaret blir därmed

$$w = 2e^{i\alpha}\,\frac{z - (3 + 4i)}{z - (4 + 3i)}.$$

6. Svaren blir

   a) $\operatorname{grad}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{r}) = \boldsymbol{a}$
   b) $\operatorname{div}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r}) = 0$
   c) $\operatorname{rot}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r}) = 2\boldsymbol{a}$

   Om man inte gillar nablakalkyl så är det bara att sönderdela $\boldsymbol{a}$ i komponenter, säg $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$, direkt använda definitionerna av grad, div, rot och sedan försöka sätta ihop allting på slutet så att man inte ser de enskilda komponenterna.

7. a) $\boldsymbol{F}$ blir, åtminstone lokalt, konservativt utanför z-axeln (som är singulär för $\boldsymbol{F}$) om $\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = 0$. Beräkning av rotationen i sfäriska koordinater ger att

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\left(\frac{-Ar\sin\varphi}{(1 + r^2)^2} + \frac{2r\sin\varphi}{(1 + r^2)^2}\right) r\boldsymbol{e}_\theta,$$

   vilket $= 0$ om och endast om $A = 2$. För detta värde på A är $\boldsymbol{F}$ alltså lokalt konservativt. Att $\boldsymbol{F}$ också är globalt konservativt kommer att visa sig i b).

b) För $A = 2$ har $\boldsymbol{F}$ alltså en skalär potential, åtminstone lokalt. Med hjälp av en sådan kan alla linjeintegraler lätt beräknas. Vi bestämmer en potential genom att lösa $\operatorname{grad} U = \boldsymbol{F}$. Detta blir

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial r} = \frac{2r\cos\varphi}{(1+r^2)^2}, \\ \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta} = 0, \\ \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \varphi} = \frac{\sin\varphi}{r(1+r^2)\sin\theta}. \end{cases}$$

Första ekvationen ger

$$U = -\frac{\cos\varphi}{1+r^2} + f(\theta,\varphi),$$

varefter den andra ekvationen ger att "integrationskonstanten" $f(\theta,\varphi)$ bara kan bero på φ, och den tredje ekvationen visar till slut att f inte kan bero på φ heller, så $f = C$, en konstant. Vi väljer $C = 0$ varvid

$$U = -\frac{\cos\varphi}{1+r^2}.$$

Denna potential är väldefinierad överallt (utanför z-axeln), så $\boldsymbol{F}$ är verkligen konservativt då $A = 2$. (Vad som är viktigt här är att U är 2π-periodisk som funktion av φ; detta gör att U kommer tillbaka till samma värde när man går ett varv runt z-axeln.)

Den sökta integralen blir nu

$$\int_P^Q \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = U(Q) - U(P) = \cdots = \frac{7}{10}.$$

8. a) Vi skriver

$$\boldsymbol{r}(u,v,w) = (u^2 - v^2, 2uv\cos w, 2uv\sin w),$$

varvid

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} = (2u, 2v\cos w, 2v\sin w),$$
$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = (-2v, 2u\cos w, 2u\sin w),$$
$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w} = (0, -2uv\sin w, 2v\cos w).$$

Man verifierar omedelbart att

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w} = 0,$$

vilket visar att koordinatsystemet är ortogonalt.

b) Skalfaktorerna är

$$h_u = |\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}| = \cdots = 2\sqrt{u^2+v^2},$$
$$h_v = |\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}| = \cdots = 2\sqrt{u^2+v^2},$$
$$h_w = |\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w}| = \cdots = 2uv,$$

och första enhetsvektorn

$$\boldsymbol{e}_u = \frac{1}{h_u}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} = (\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}, \frac{v\cos w}{\sqrt{u^2+v^2}}, \frac{v\sin w}{\sqrt{u^2+v^2}}).$$

c) För $\Phi = \Phi(u)$ fås

$$\Delta\Phi = \frac{1}{8uv(u^2+v^2)}(\frac{\partial}{\partial u}(2\sqrt{u^2+v^2}\cdot 2uv\cdot\frac{1}{2\sqrt{u^2+v^2}}\frac{\partial\Phi}{\partial u})+0+0) = \cdots = \frac{1}{4u(u^2+v^2)}(u\Phi'(u))'.$$

Detta $= 0$ om och endast om $u\Phi'(u) = A$ (A konstant), vilket ger svaret

$$\Phi(u) = A\ln u + B,$$

A och B godtyckliga konstanter.

9. a) Om man sätter $t = e^{iz}$ i definitionen av $\cos z$ så blir ekvationen $\cos z = 0$ en andragradsekvation i t, som lätt löses. Detta leder till svaret

$$z = \frac{\pi}{2} + n\pi,$$

där n genomlöper alla heltal.

b) Detta följer lätt från definitionen av $\tan z$ (både täljare och nämnare byter tecken då z ökar med π).

c) Med $t = e^{iz}$ blir ekvationen $w = \tan z$ en andragradsekvation i t, vilken lätt löses och leder till formeln

$$z = \frac{1}{2i}\log\frac{1+iw}{1-iw}.$$

d) Derivering av ovanstående uttryck ger

$$\frac{d\arctan w}{dw} = \frac{dz}{dw} = \cdots = \frac{1}{1+w^2}.$$

10. a) Man kan börja med att flytta (t.ex.) hörnet $z = -1$ till origo och hörnet $z = 3$ till oändligheten med en Möbius, $z \mapsto w_1$. Enklaste valet är

$$w_1 = \frac{z+1}{z-3}.$$

Man finner då att D avbildas på tredje kvadranten i w_1-planet. För att göra detta kvartsplan till ett halvplan kvadrerar vi, och vi hamnar då, som det visar sig, just i det övre halvplanet H. Den sökta avbildningen är alltså

$$w = w_1^2 = (\frac{z+1}{z-3})^2.$$

(Även andra korrekta svar finns.)

b) Om vi skriver, i termer av ovanstående konforma avbildning, $U(z) = V(w)$, så ska $V(w)$ lösa Laplaces ekvation i H med randvärden $V = 3$ på positiva realaxeln (som är bilden av den raka delen av ∂D) och $V = 4$ på negativa realaxeln (bilden av den cirkulära delen av ∂D). Allt detta leder till

$$V(w) = 3 + \frac{1}{\pi}\operatorname{Arg} w, \quad w \in H,$$

där $\operatorname{Arg} w$ betecknar principalgrenen av argumentfunktionen, som (bl.a.) uppfyller $0 < \operatorname{Arg} w < \pi$ för $w \in H$. I termer av denna har vi alltså

$$U(z) = 3 + \frac{1}{\pi}\operatorname{Arg}(\frac{z+1}{z-3})^2.$$

Det återstår att skriva detta U som funktion av x och y. För $z \in D$ har vi konstaterat att $w_1 = \frac{z+1}{z-3}$ ligger i tredje kvadranten. De fortsatta räkningarna underlättas (visar det sig) om man arbetar med $-w_1$ istället för w_1; vi har $w = w_1^2 = (-w_1)^2$, och fördelen med $-w_1$ är att det ligger i första kvadranten. Detta gör att $\operatorname{Arg}(-w_1)^2 = 2\operatorname{Arg}(-w_1)$. (Alternativt använder man att $\operatorname{Arg} w_1^2 = 2\operatorname{Arg} w_1 + 2\pi$ för w_1 i tredje kvadranten.)

Med $w = u + iv \in H$ (dvs. $v > 0$) har vi

$$\operatorname{Arg} w = \operatorname{arccot} \frac{u}{v}$$

för den gren av arccot som tar värden mellan noll och π. Därmed fås

$$U = 3 + \frac{2}{\pi}\operatorname{Arg}\left(-\frac{z+1}{z-3}\right) = 3 + \frac{2}{\pi}\operatorname{Arg}\left(-\frac{(z+1)(\bar{z}-3)}{(z-3)(\bar{z}-3)}\right)$$

$$= 3 + \frac{2}{\pi}\operatorname{Arg}\frac{4-(x-1)^2-y^2+4iy}{(x-3)^2+y^2} = 3 + \frac{2}{\pi}\operatorname{arccot}\frac{4-(x-1)^2-y^2}{4y}.$$