Institutionen för matematik, KTH,
Björn Gustafsson

Tentamensskrivning, 2010-04-17, kl. 9.00-14.00.
SF 1648, Partiella differentialekvationer för ME och K.

- Tillåtet hjälpmedel: Formelsamlingen BETA. (Ej räknedosa.)
- Tentamen består av 5 uppgifter, som var och en bedöms med 0–5 poäng. Betygsgränserna, för den totala poängsumman, inklusive bonus från lappskrivningar, är 23 (betyg A), 20 (betyg B), 17 (betyg C), 14 (betyg D), 11 (betyg E).

---

1. Bestäm två linjärt oberoende lösningar till differentialekvationen
$$(1-x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0$$
på intervallet $-1 < x < 1$ genom att göra en potensserieansats kring $x = 0$. Det räcker att ta med de tre första termerna skilda från noll i vardera lösningen.

2. Utböjningen $u = u(x, y)$ av ett rektangulärt membran uppfyller Laplaces ekvation
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (0 < x < 2,\ 0 < y < 1).$$
Bestäm $u(x, y)$ då membranet är fastspänt på nivå noll ($u = 0$) längs de tre kanterna $L_1 :\ x = 0,\ 0 < y < 1$; $L_2 :\ 0 < x < 2,\ y = 0$; $L_3 :\ x = 2,\ 0 < y < 1$, medan det längs den fjärde kanten $L_4 :\ 0 < x < 2,\ y = 1$ gäller
$$u(x, 1) = 5 \sin \pi x + 7 \sin \frac{3\pi x}{2}.$$

3. Vågfunktionen $\psi(x, t)$ för en elektron som rör sig fritt inom ett intervall $0 < x < L$, och i ändpunkterna av detta möter en oändlig potentialbarriär, uppfyller den ett-dimensionella Schrödingerekvationen
$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \qquad (0 < x < L,\ t > 0)$$
med randvillkoren
$$\psi(0, t) = \psi(L, t) = 0 \qquad (t > 0).$$
Här är $\mu > 0$ elektronens massa, $\hbar > 0$ Plancks konstant och $i = \sqrt{-1}$.
Antag att L och μ i lämpligt valda enheter har värdena
$$L = 2, \quad \mu = \frac{1}{8},$$
medan Plancks konstant fortfarande får heta $\hbar$ i dessa enheter. Bestäm tidsutvecklingen av vågfunktionen då denna ges initialt av
$$\psi(x, 0) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & 1 < x < 2. \end{cases}$$

4. Bestäm en lösning $u = u(x,t)$ i kvartsplanet $x > 0$, $t > 0$ till följande problem, med en inhomogen vågekvation samt rand- och begynnelsevärden:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 12t \qquad (x > 0,\, t > 0), \\ u(0,t) = 0 \qquad (t > 0), \\ u(x,0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \qquad (x > 0). \end{cases}$$

För att göra lösningen entydigt bestämd kräver vi också att $u(x,t)$ ska vara begränsad då $x \to +\infty$ (för varje fixt värde på $t > 0$).

Ledning: Laplacetransformera i t-led.

5. Laplaces ekvation i sfäriska koordinater (r, θ, φ) är

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Lambda u = 0,$$

där

$$\Lambda u = \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \cot\theta \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

Genom variabelseparationen $u(r,\theta,\varphi) = R(r)Y(\theta,\varphi)$ får man de två egenvärdesproblemen

$$\begin{cases} r^2 R'' + 2rR' + \lambda R = 0 \qquad (0 < r < \infty), \\ \Lambda Y = \lambda Y \end{cases}$$

för R respektive Y, och där λ är en separationskonstant. Man kan visa att villkoren att $Y(\theta,\varphi)$ måste ha ändliga gränsvärden då $\theta \to 0$, $\theta \to \pi$ och vara 2π-periodisk i φ bara tillåter värdena

$$\lambda = -n(n+1), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

på λ. Vi antar i fortsättningen att λ är på denna form.

a) Lös på valfritt sätt ekvationen för $R(r)$ med beaktande av att $R(r)$ måste ha ett ändligt gränsvärde då $r \to 0$.

b) Genomför variabelseparation mellan θ och φ, dvs. sök lösningar till $\Lambda Y = \lambda Y$ på formen

$$Y(\theta,\varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\varphi).$$

En ny separationskonstant uppträder. Bestäm de differentialekvationer som Θ och Φ ska uppfylla samt bestäm de tillåtna värdena på den nya separationskonstanten.

c) Visa att differentialekvationen för Θ via variabelsubstitutionen $s = \cos\theta$ kan identifieras med Legendres associerade differentialekvation (se BETA) och uttryck lösningarna Θ i associerade Legendrefunktioner.

d) Sammanfatta det hela genom att skriva upp den allmänna lösningen till Laplaces ekvation i sfäriska koordinater som en oändlig dubbelsumma innehållande de erhållna basfunktionerna.

LYCKA TILL!