Institutionen för matematik, KTH,
Björn Gustafsson

Tentamensskrivning, 2010-06-02, kl. 8.00-13.00.
SF 1648, Partiella differentialekvationer för ME och K.

- Tillåtet hjälpmedel: Formelsamlingen BETA. (Ej räknedosa.)
- Tentamen består av 5 uppgifter, som var och en bedöms med 0–5 poäng. Betygsgränserna, för den totala poängsumman, inklusive bonus från lappskrivningar, är 23 (betyg A), 20 (betyg B), 17 (betyg C), 14 (betyg D), 11 (betyg E).

---

1. Bestäm lösningen $u = u(x,t)$ till följande begynnelse/randvärdesproblem för värmeledningsekvationen i en rumsdimension:

$$\begin{aligned} \text{PDE}: &\quad \frac{\partial u}{\partial t} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} && \text{för} \quad 0 < x < 1,\ t > 0, \\ \text{RV}: &\quad u(0,t) = u(1,t) = 0 && (t > 0), \\ \text{BV}: &\quad u(x,0) = 1 - x && (0 < x < 1). \end{aligned}$$

2. Differentialekvationen

$$4xy'' + 2y' - y = 0$$

är singulär i origo, men bara regulärt singulär. Det finns därför minst en lösning på formen

$$y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

som vi kan normalisera så att $a_0 = 1$. Bestäm de möjliga värdena på exponenten r i en sådan utveckling samt, för ett av dessa värden (valfritt vilket), koefficienterna a_1, a_2, a_3 (med $a_0 = 1$).

3. Den stationära temperaturfördelningen $u = u(x,y)$ i en tunn rektangulär platta uppfyller Laplaces ekvation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (0 < x < 2,\ 0 < y < 1).$$

Bestäm temperaturen överallt i plattan då de tre kanterna $L_1 : x = 0,\ 0 < y < 1$; $L_2 : 0 < x < 2,\ y = 0$; $L_3 : x = 2,\ 0 < y < 1$ hålls vid temperatur noll ($u = 0$), medan temperaturen längs den fjärde kanten $L_4 : 0 < x < 2,\ y = 1$ varierar enligt

$$u(x,1) = 2\sin 3\pi x - \sin 4\pi x.$$

4. Uppgiften går ut på att lösa värmeledningsekvationen i en oändlig cylinder med temperatur noll på mantelytan och given initialtemperatur i cylindern. Vi använder cylinderkoordinater (ρ, φ, z) och gör antaganden sådana att temperaturen u i själva verket bara beror på ρ och tiden t: $u = u(\rho, t)$. Problemet är då

$$\begin{aligned} \text{PDE}: &\quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} &&\quad (0 < \rho < 1,\ t > 0) \\ \text{RV}: &\quad u(1,t) = 0 &&\quad (t > 0), \\ \text{BV}: &\quad u(\rho, 0) = f(\rho) &&\quad (0 < \rho < 1), \end{aligned}$$

där

$$f(\rho) = 5J_0(\alpha_3 \rho) - 2J_0(\alpha_4 \rho)$$

och $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 \ldots$ är nollställena till den nollte Besselfunktionen J_0. I randvillkoren ingår också att $\lim_{\rho \to 0} u(\rho, t)$ existerar och är ändligt.

Bestäm lösningen $u = u(\rho, t)$ till ovanstående problem med hjälp av variabelseparation osv. Separationskonstanten har sådant tecken att att lösningen inte innehåller termer som växer exponentiellt då $t \to +\infty$.

5. Differentialekvationen för dämpad svängning hos en sträng är

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2k\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

där $k > 0$ är en dämpningskonstant och c utbredningshastigheten. Lös denna differentialekvation i området $0 < x < \pi$, $t > 0$ då $k = 2$, $c = 1$ samt

$$u(0,t) = u(\pi, t) = 0 \quad (t > 0),$$

$$u(x, 0) = \sin 3x, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 2\sqrt{3}\sin x \quad (0 < x < \pi).$$

LYCKA TILL!