Institutionen för matematik, KTH,
Björn Gustafsson

Tentamensskrivning 2007-12-21, kl. 14.00-19.00

SF1649 Vektoranalys och komplexa funktioner för ME

- Tillåtna hjälpmedel: Formelsamlingen BETA samt "isskrapan"(inplastad bricka med vektorformler utgiven av Teoretisk Elektroteknik/Alfvénlaboratoriet).
- Tentamen består av två delar. De fem uppgifterna på del 1 svarar mot de 5 modulerna i kursen och bedöms på skalan godkänt/underkänt. För godkänt resultat på kursen krävs godkänt resultat på minst 4 av de 5 modulerna. Den som redan har godkänt resultat på en viss modul genom kontrollskrivning/inlämningsuppgift ska ej lösa motsvarande uppgift nedan.

  Del 2 av tentamen består av fem uppgifter omfattande totalt 20 poäng. Godkänt resultat på 5 moduler (i stället för 4) ger 2 extrapoäng.

Tentamensskrivning, del 1.

1. [MODUL 1] Ett skalärfält U ges i sfäriska koordinater av

$$U(r,\theta,\varphi) = r^3 \sin^2\theta.$$

Beräkna

a) $\operatorname{grad} U$,

b) $\operatorname{rot}\operatorname{grad} U$,

c) $\operatorname{div}\operatorname{grad} U$.

Svaren ska ges i sfäriska koordinater.

2. [MODUL 2] Beräkna flödesintegralen

$$\iint_S \operatorname{rot} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, dS,$$

där $\boldsymbol{F}$ är vektorfältet

$$\boldsymbol{F} = y\,\boldsymbol{e}_x + z\,\boldsymbol{e}_y + x\,\boldsymbol{e}_z$$

och ytan S definieras av

$$S: \quad z = 5 - x^2 - y^2, \quad x^2 + y^2 \leq 4.$$

Enhetsnormalvektorn $\boldsymbol{n}$ är riktad så att den har positiv z-komponent.

3. [MODUL 3] Ett gasmoln i rymden har, uttryckt i sfäriska koordinater (r, θ, φ) och för $r > 1$, tätheten

$$\rho(r) = \frac{6}{r^5}.$$

Gravitationsfältet som alstras av gasmolnet har en potential U som uppfyller Poissons ekvation

$$-\Delta U = \rho.$$

Bestäm alla sfäriskt symmetriska lösningar $U = U(r)$ till denna ekvation för $r > 1$.

4. [MODUL 4] En reellvärd funktion $u = u(x, y)$ är given av

$$u = 2e^{2y} \sin x \, \cos x$$

a) Visa att u är harmonisk.

b) Bestäm en harmoniskt konjugerad funktion till u, dvs. en harmonisk funktion $v = v(x, y)$ sådan att $f(z) = u + iv$ är analytisk som funktion av $z = x + iy$.

c) Uttryck den analytiska funktion $f(z)$ som fås fram i b) som en funktion enbart av variabeln z.

5. [MODUL 5] Bestäm bilden av cirkeln

$$|z - 5| = 2$$

under följande tre Möbiustransformationer

a)
$$w = \frac{12}{z-5},$$

b)
$$w = \frac{12}{z-3},$$

c)
$$w = \frac{12}{z-1}.$$

Tentamensskrivning, del 2 (SF1649). *Obs:* Uppgifterna står inte i svårighetsordning.

6. (4p) Hastighetsfältet $\boldsymbol{v}$ från en virvel längs z-axeln ges i cylinderkoordinater (ρ, φ, z), och utanför z-axeln, av

$$\boldsymbol{v} = \frac{1}{\rho}\,\boldsymbol{e}_\varphi$$

Undersök om $\boldsymbol{v}$ har, i någon del av rummet,

a) en skalär potential;

b) en vektorpotential.

c) Bestäm minst en av de potentialer som existerar och ange lämpligt definitionsområde för den. (Minst en av potentialerna i a) och b) finns alltså.)

7. (4p) Beräkna linjeintegralen av vektorfältet

$$\boldsymbol{A} = (y + 2x, x^2 + z, y)$$

längs den slutna kurva som i parameterform ges av

$$\boldsymbol{r}(t) = (\cos t, \sin t, f(t)), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Här är f är en godtycklig kontinuerlig funktion sådan att $f(0) = f(2\pi)$.

Svaret på uppgiften kommer inte att bero på f. Om du inte klarar att lösa uppgiften för godtyckligt f, lös den då för $f(t) = \cos^2 t$. (2p)

8. (4p) Ett kroklinjigt koordinatsystem (u, v, w) definieras för $u, v > 0$ och $0 < w < 2\pi$ genom

$$\begin{cases} x = uv\cos w, \\ y = uv\sin w, \\ z = \frac{1}{2}(u^2 - v^2), \end{cases}$$

där (x, y, z) är de vanliga kartesiska koordinaterna.

a) Visa att (u, v, w) bildar ett *ortogonalt* koordinatsystem.

b) Bestäm tillhörande skalfaktorer h_u, h_v, h_w och enhetsbasvektorer $\boldsymbol{e}_u$, $\boldsymbol{e}_v$, $\boldsymbol{e}_w$.

c) Ett vektorfält $\boldsymbol{A}$ ges i kartesiska koordinater av

$$\boldsymbol{A} = x\,\boldsymbol{e}_x + y\,\boldsymbol{e}_y + z\,\boldsymbol{e}_z.$$

Uttryck $\boldsymbol{A}$ i de nya koordinaterna, dvs. bestäm komponenterna A_u, A_v, A_w (som funktioner av u, v, w) i framställningen $\boldsymbol{A} = A_u\,\boldsymbol{e}_u + A_v\,\boldsymbol{e}_v + A_w\,\boldsymbol{e}_w$.

9. (2p) Bestäm alla lösningar $z \in \boldsymbol{C}$ till följande två ekvationer.

a)
$$\sin z = 0.$$

b)
$$1 + \frac{1}{2^z} = 0.$$

(Här definieras 2^z som $e^{z \ln 2}$.)

10. (6p) Den komplexa funktionen $w = \cos z$ är analytisk i hela komplexa planet.

a) Undersök hur $\cos z$ avbildar följande tre linjer:
$$L_1 = \{z = x + iy : x = \pi, \quad y \geq 0\},$$
$$L_2 = \{z = x + iy : \pi \leq x \leq 2\pi, \quad y = 0\},$$
$$L_3 = \{z = x + iy : x = 2\pi, \quad y \geq 0\}.$$

b) Använd resultatet i a) för att dra slutsatsen att $w = \cos z$ avbildar området
$$D = \{z = x + iy : \pi < x < 2\pi, \quad y > 0\}$$
konformt på övre halvplanet
$$H = \{w = u + iv : v > 0\}.$$

c) Bestäm en harmonisk funktion $V = V(u, v)$ i H som har randvärdena
$$V(u, 0) = \begin{cases} 5, & u < -1, \\ 4, & -1 < u < 1, \\ 1, & u > 1. \end{cases}$$

d) Bestäm en lösning $U = U(x, y)$ till följande Dirichletproblem i D:
$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \quad \text{i } D,$$
$$U = \begin{cases} 5 & \text{på } L_1, \\ 4 & \text{på } L_2, \\ 1 & \text{på } L_3. \end{cases}$$

LYCKA TILL!