Institutionen för matematik, KTH,
Björn Gustafsson

Tentamensskrivning, 2010-03-15, kl. 14.00-19.00.

SF 1648, SF 1641
Partiella differentialekvationer för ME och K.

- Tillåtet hjälpmedel: Formelsamlingen BETA. (Ej räknedosa.)
- Tentamen består av 5 uppgifter, som var och en bedöms med 0–5 poäng. Betygsgränserna, för den totala poängsumman, inklusive bonus från lappskrivningar, är 23 (betyg A), 20 (betyg B), 17 (betyg C), 14 (betyg D), 11 (betyg E).

---

1. Bestäm lösningen $u = u(x,t)$ till följande begynnelse/randvärdesproblem för en svängande sträng av längd π.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \text{för} \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0,$$
$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \qquad (t > 0),$$
$$u(x,0) = 5\sin 2x \qquad (0 < x < \pi),$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 6\sin 3x \qquad (0 < x < \pi).$$

2. Vi betraktar differentialekvationen

$$x^2 y'' + 3xy' + (1 + \lambda x)y = 0$$

på intervallet $0 < x < 1$, och där λ är en reell parameter.

a) Bestäm en lösning till ekvationen med hjälp av en potensserieansats av typen

$$y(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

där exponenten r och koefficienterna a_n ska bestämmas. Lösning $y(x)$ kan förslagsvis normaliseras så att $a_0 = 1$. Ta med de fyra första termerna i serien eller ta fram en allmän formel för koefficienterna. (Lösningen kommer att innehålla parametern λ.)

b) Differentialekvationen kan skrivas på Sturm-Liouville-form

$$(p(x)y')' + (q(x) + \lambda r(x))y = 0.$$

Bestäm funktionerna $p(x)$, $q(x)$ och $r(x)$ i en sådan framställning.

3. Temperaturen $u = u(x,t)$ i en stav av längd π uppfyller värmeledningsekvationen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (0 < x < \pi, \quad t > 0).$$

Bestäm den fullständiga temperaturutvecklingen då stavens ändar hålls vid olika temperaturer enligt

$$\begin{cases} u(0,t) = 0, \\ u(\pi,t) = 5 \end{cases}$$

och temperaturen från början ges av

$$u(x,0) = 2\cos x.$$

4. Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = 5\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (-\infty < x < \infty, \quad t > 0), \\ u(x,0) = \frac{2}{1+x^2} & (-\infty < x < \infty) \end{cases}$$

för $u = u(x,t)$ genom att Fouriertransformera med avseende på x.

5. Vågfunktionen ψ för en partikel med massa $\mu > 0$ som rör sig fritt i ett cirkulärt hål i en tunn platta uppfyller Schrödingerekvationen, given i polära koordinater (r,φ) av

$$i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}\right).$$

Här är $\hbar > 0$ (Plancks konstant) och $i = \sqrt{-1}$. Vågfunktionen $\psi = \psi(r,\varphi,t)$ är regulär i origo, 2π-periodisk i variabeln φ, löser Schrödingerekvationen i området $0 \le r < 1$ samt uppfyller randvillkoret

$$\psi(1,\varphi,t) = 0.$$

a) Bestäm alla lösningar på produktform

$$\psi(r,\varphi,t) = R(r)\Phi(\varphi)T(t)$$

till ovanstående problem. Separationskonstanten mellan tidsvariabeln och övriga variabler (närmare bestämt konstanten $E = i\hbar T'(t)/T(t)$) kan tolkas som en energi, och du får använda att denna är positiv. Specificera vilka energinivåer som förekommer bland de tillstånd hos partikeln som svarar mot produktlösningar.

b) Generellt är vågfunktionen en blandning (superposition) av olika produktlösningar. Bestäm tidsutvecklingen av vågfunktionen i fallet att den initialt ges av

$$\psi(r,\varphi,0) = 2J_3(\alpha_{3,4}r)e^{3i\varphi} + 6J_7(\alpha_{7,8}r)e^{7i\varphi}.$$

Här används $0 < \alpha_{p,1} < \alpha_{p,2} < \alpha_{p,3} < \dots$ som beteckningar för nollställena till den p:te Besselfunktionen J_p.

Anm. Normalisering till $\int |\psi|^2 = 1$ behöver ej genomföras i ovanstående uppgifter.

LYCKA TILL!