Institutionen för matematik, KTH,
Björn Gustafsson

Tentamensskrivning 2008-12-19, kl. 14.00-19.00

SF1649 Vektoranalys och komplexa funktioner för ME

- Tillåtna hjälpmedel: Formelsamlingen BETA samt inplastad bricka med vektorformler (utgiven av Teoretisk Elektroteknik/Alfvénlaboratoriet).
- Tentamen består av två delar. De fem uppgifterna på **del 1** svarar mot de 5 modulerna i kursen och bedöms på skalan godkänt/underkänt. För godkänt resultat på kursen krävs godkänt resultat på minst 4 av de 5 modulerna. Den som redan har godkänt resultat på en viss modul genom kontrollskrivning/inlämningsuppgift ska ej lösa motsvarande uppgift nedan.

  För högre betyg än godkänt krävs insatser på **del 2** av tentamen, som består av fem uppgifter som var och en bedöms på skalan 0-4 poäng. Godkänt resultat på 5 moduler (i stället för 4) ger 2 extrapoäng.

Tentamensskrivning, del 1

1. [MODUL 1]

   Vi befinner oss i punkten $(1,1,1)$ i ett rum där temperaturen ges av skalärfältet

   $$T = 4xyz + y^2 - xz^2.$$

   a) I vilken riktning ökar temperaturen snabbast? Svara med att ange enhetsvektorn i den efterfrågade riktningen.

   b) Om vi rör oss med hastigheten $\boldsymbol{v} = (2,1,-2)$ från punkten $(1,1,1)$, med vilken hastighet ökar/minskar då temperaturen?

2. [MODUL 2]

   En yta S är parametriserad av

   $$\begin{cases} x = u, \\ y = 2uv, \\ z = u^2 - v^2, \end{cases}$$

   där $0 \le u \le 2$, $0 \le v \le 3$. Beräkna flödesintegralen

   $$\iint_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, dS,$$

   då

   $$\boldsymbol{F} = (1, -x, y)$$

   och riktningen hos $\boldsymbol{n}$ bestäms av att dess x-komponent är positiv.

3. [MODUL 3]

   Ett vektorfält ges i cylinderkoordinater (ρ, φ, z) av

$$\boldsymbol{F} = \rho^2\, \boldsymbol{e}_\rho + z\rho \sin\varphi\, \boldsymbol{e}_z.$$

   Beräkna flödet av $\boldsymbol{F}$ ut ur den cylinder V som i kartesiska koordinater definieras av

$$V: \quad \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1, \\ 0 \leq z \leq 2. \end{cases}$$

4. [MODUL 4]

   Visa att funktionen

$$v(x, y) = 2xy + e^x \sin y$$

   är harmonisk (uppfyller Laplaces ekvation). Konstruera därefter en analytisk funktion som har v som imaginärdel. Svara med den analytiska funktionen skriven på formen $w = f(z)$, där $w = u + iv$, $z = x + iy$.

5. [MODUL 5]

   Låt H vara halvplanet

$$H: \quad \operatorname{Re} z < \operatorname{Im} z.$$

   Randen till H utgörs av den räta linjen

$$L: \quad \operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z.$$

   a) Bestäm spegelpunkten, med avseende på linjen L, till punkten $z = 3 + 4i$.
   b) Bestäm en konform avbildning av halvplanet H på cirkelskivan

$$D: \quad |w| < 2$$

   sådan att punkten $z = 3 + 4i$ avbildas på $w = 0$.

Tentamensskrivning, del 2 (SF1649, 2008-12-19)

6 Låt $\boldsymbol{a}$ vara en konstant vektor och $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ ortsvektorn. Beräkna, med hjälp av nablakalkyl eller på annat sätt,

a) $\operatorname{grad}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{r})$

b) $\operatorname{div}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r})$

c) $\operatorname{rot}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r})$

Svaren får innehålla vektorn $\boldsymbol{a}$.

7 Ett vektorfält ges i sfäriska koordinater (r, θ, φ) av

$$\boldsymbol{F} = \frac{Ar\cos\varphi}{(1+r^2)^2}\,\boldsymbol{e}_r + \frac{\sin\varphi}{r(1+r^2)\sin\theta}\,\boldsymbol{e}_\varphi,$$

där A är en konstant.

a) Bestäm ett värde på A så att $\boldsymbol{F}$ blir konservativt.

b) Beräkna, för detta värde på A, linjeintegralen

$$\int_P^Q \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$$

längs en godtycklig kurva från punkten P till punkten Q, där P och Q ges av

$$P: \quad r = 1,\ \theta = \frac{\pi}{3},\ \varphi = 0,$$

$$Q: \quad r = 2,\ \theta = \frac{2\pi}{3},\ \varphi = \pi.$$

8 Ett kroklinjigt koordinatsystem (u, v, w) definieras genom

$$\begin{cases} x = u^2 - v^2, \\ y = 2uv\cos w, \\ z = 2uv\sin w, \end{cases}$$

där $u, v > 0$, $0 < w < 2\pi$

a) Visa att koordinatsystemet är ortogonalt.

b) Bestäm skalfaktorerna h_u, h_v, h_w samt enhetsvektorn $\boldsymbol{e}_u$.

c) Bestäm alla lösningar till Laplaces ekvation $\Delta\Phi = 0$ (ekvivalent, $\operatorname{div}\operatorname{grad}\Phi = 0$) som bara beror på u, dvs som är på formen $\Phi = \Phi(u)$.

9 Funktionen $w = \tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$ är analytisk överallt utom i de punkter där $\cos z = 0$.

a) Bestäm alla nollställen till $\cos z$ i komplexa planet.

b) Bevisa att $\tan z$ har period π: $\tan(z + \pi) = \tan z$.

c) Eftersom $w = \tan z$ är periodisk, och därmed tar samma värden flera gånger, kan den inte ha någon enkelvärd invers definierad i hela komplexa planet. Men den har ändå en mångtydig invers, $z = \arctan w$, från vilken man kan välja ut enkelvärda grenar i olika delar av komplexa planet. Härled en formel för $\arctan w$ som bara innehåller rationella funktioner och logaritmer. (En sådan formel finns i BETA, men den ska härledas.) Utgå från definitionerna av $\sin z$ och $\cos z$ i termer av exponentialfunktionen.

d) Härled den välkända formeln för derivatan av $\arctan w$, antingen genom att använda formeln som erhölls i c) (varvid man får använda alla vanliga deriveringsregler plus att $\frac{d}{dz} \log z = \frac{1}{z}$), eller genom att beräkna derivatan av $\tan z$ och använda att funktionerna tan och arctan är varandras inverser.

10 Låt D vara halvcirkelområdet

$$D: \quad |z-1| < 2,\ \operatorname{Im} z > 0.$$

a) Bestäm en konform avbildning av D på övre halvplanet

$$H: \quad \operatorname{Im} w > 0.$$

b) Lös Laplaces ekvation,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0,$$

i D med följande randvärden på ∂D:

$$U = \begin{cases} 3, & |z-1| < 2,\ \operatorname{Im} z = 0 \\ 4, & |z-1| = 2,\ \operatorname{Im} z > 0. \end{cases}$$

(Punkterna $z = -1$ och $z = 3$ på ∂D behöver man inte bry sig om.)

LYCKA TILL!