INFÖR TENTAN (Av Göran Rundqvist, goranr@math.kth.se)

Allmänna råd: Gör inte för mycket av dina räkningar i huvudet, skriv ner dem istället! Ska du t ex förenkla $2(a+b)^2 - 3(b-a)^2$ utför först kvadreringarna och SKRIV NER resultatet. Fortsätt sedan med att multiplicera in i paranteserna. Försöker du göra bägge dessa moment på samma gång är risken stor att det blir fel. Det säger sig självt att du ska vinnlägga dig om att skriva så tydligt som möjligt och är t ex dina 2-or alltför lika dina z, så kommer detta förr eller senare att kosta. Skriv ingen kladd utan räkna DIREKT på det papper du tänker lämna in. Använd blyerts där och stryk inte över utan sudda. Vid sidan har du ett kladdpapper där du kan skissa lite på en lösning eller testa formler. Fundera lite över om ditt svar är rimligt. Detta kanske inte är så lätt att bedöma, men t ex sin och cos med absolutbelopp > 1 , negativa areor eller log med argument < 0 hör definitivt till det orimliga.

När du har räknat ett tal, gå igenom det OMEDELBART och lägg det sedan åt sidan om allt är i sin ordning. Detta sätt att arbeta har fördelar, det känns tryggt med en "bank av tal" som man vet är kontrollerade och skulle du komma i tidsnöd på slutet går det bara ut över det tal du just håller på med. (Var dock extra noga med de tal som svarar mot de olika momenten i kursen!) Ha ABSOLUT INTE för bråttom när du räknar och sitt också gärna och titta igenom skrivningen i ungefär 5 minuter innan du alls börjar räkna. Om du har lärt dig formler utantill kan du börja med att skriva ner dem. Det kan spara tid att kunna formler utantill, men man bör i så fall ha åtminstone ett hum om hur de härleddes eller minnas något exempel där de kom till användning. OBSERVERA att om du är osäker på matematiska samband så är det en bra ide' att testa genom att sätta in enkla siffervärden.

Ett (kanske inte alltid fungerande) slutråd: Finner du att du får väldigt bökiga räkningar är chansen stor att du antingen räknat fel eller att det finns ett listigare sätt att räkna.

Nu följer ett informellt "strövtåg" i mattekursen. Tyvärr är det ganska ofullständigt, men jag hoppas ändå att du kommer att ha nytta av det. Koncentrera dig dock inte alltför mycket på själva exemplen utan tänk mer på de principer som ligger bakom dem. En lite orginell (men effektiv) metod att förebereda sig inför en tenta är faktiskt att SJÄLV försöka konstruera tentamenstal, detta därför att då kommer principerna verkligen i förgrunden.

BETECKNINGAR: Citationstecken " har använts flitigt. Utöver i sin vanliga betydelse används det då ett nytt begrepp införs och då jag vill säga något på ett sätt som kanske inte är helt korrekt, men där man ändå förstår vad som menas. Med "tal" menas om inget annat sägs "reellt tal" (denna inskränkning är inte alltid nödvändig men vald för enkelhets skull.) Bokstäver i början av alfabetet och bokstäver med index betecknar kända tal och/eller konstanter, medan bokstäver i slutet av alfabetet utan index betecknar "löpande storheter" d v s variabler. Med "koordinatsystem i tre dimensioner" avses "det vanliga" d v s om "det vanliga koordinatsystemet i 2 dimensioner" ligger i detta pappers plan så ligger punkten (1,1,1) ovanför pappret och på avståndet $\sqrt{3}$ från origo.

1. KOMPLEXA TAL.

Något som återkommer FLERA GÅNGER i kursen är att man inför vissa matematiska objekt och definierar räknelagar för dem. Ett typiskt exempel på detta är komplexa tal.

Hur kan man räkna med komplexa tal, de "finns" ju inte är en vanlig fråga. Precis som t ex schacktorn inte är definierade "i sig" utan genom de spelregler de följer, så är komplexa tal inte definierade "i sig" utan genom de räkneregler som gäller för dem. Det finns alltså inte mer anledning att fundera över vad komplexa tal "egentligen är" än att fundera över "den sanna naturen" hos ett schacktorn!

Egentligen är komplexa tal inte tal utan talpar. De består av en reell del (a) och en "imaginär" del (b). Genom att skriva talparet som $a + bi$ uppnår man att "de vanliga räknereglerna" kommer att gälla, det enda man behöver göra är att ersätta de i^2 som dyker upp med -1.

Ser man komplexa tal som talpar kan talet a+bi identifieras med punkten (a,b) i ett koordinatsystem som i detta sammanhang kallas för det komplexa talplanet. Ett tal med $b = 0$ identifieras i sin tur med det reella talet a och de komplexa talen utgör således en utvidgning av de reella talen vilket faktiskt "tvingar fram" följande definition av absolutbelopp.

För ett reellt tal är dess absolutbelopp lika med avståndet mellan talet och origo och "överför"vi denna definition till de komplexa talen får vi definitionen $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Samma räkneregler som gäller för abs.belopp av reella tal gäller för abs.belopp av komplexa. Så t ex gäller 1. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ och 2.$|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|$ $(z_2 \neq 0)$.(Av 1."baklänges" följer $|z|^2 = |z^2|$ som ger ett lättare sätt att få fram (3) nedan.)

Ett speciellt problem som dyker upp bl a när man ska lösa en andragrads ekvation med komplexa koefficienter är att bestämma a och b när t ex $\sqrt{3 + 4i} = a + bi$ gäller.

Kvadrerar man båda sidor får man relationen $3+4i = a^2-b^2+2abi$ Eftersom både imaginär och realdelar måste vara lika ger detta $3 = a^2 - b^2$ (1) och $4 = 2ab$ (2). Genom att ta absolutbeloppet för båda sidor i relationen får man $\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{(a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2}$ varur $5 = a^2 + b^2$ (3)

Lägger vi ihop (1) och (3) får vi $8 = 2a^2$ varur $a = \pm 2$ och drar vi (1) från (3) får vi $2 = 2b^2$ varur $b = \pm 1$. Sambandet (2) d v s $4 = 2ab$ visar nu att a och b har samma tecken så antingen gäller $a = 2, b = 1$ eller så gäller $a = -2, b = -1$.

Sammanfattningsvis har vi alltså att $\sqrt{3 + 4i} = \pm(2 + i)$. OBS. att när man skriver roten ur ett komplext tal så är $\pm$-tecknet "inbyggt" i rottecknet. Skriv därför inte $\pm\sqrt{3 + 4i}$!

För komplexa tal finns en "ny" operation nämligen konjugering. Den betecknas med ett streck över talet och innebär geometriskt att talet speglas i den reella axeln. Med $z = a+bi$ har vi $\bar{z} = a - bi$. och f ö gäller följande räkneregler: 1. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ 2. $\overline{z_1/z_2} = \bar{z}_1/\bar{z}_2$ 3. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

Med hjälp av regel 1. och 3. ovan visar man lätt att om en n:te grads ekvation har reella koefficienter och en rot är= z så är också $\bar{z}$ en rot.Det enda som behövs är att konjugera båda leden i ekvationen och observera att reella tal inte ändras vid konjugering.

En fantastisk formel där komplexa tal ingår är $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. (Matematikern Euler som väl var den som först skrev ner detta trodde nog inte sina ögon!) I formeln ingår ALLA trigonometriska samband. Ex.$\cos 2x + i \sin 2x = e^{i2x} = (e^{ix})^2 = (\cos x + i \sin x)^2 = \cos^2 x - \sin^2 x + i2 \cos x \cdot \sin x$ ger genom att real resp. imaginärdelarna måste vara lika formlerna för cos 2x resp. sin 2x. Kanske kom Euler fram till sin formel via serieutveckling; vi ska se på detta längre fram.

2. VEKTORER I RYMDEN.

Om vi flyttar en kraft utan att ändra vare sig dess riktning eller styrka så ändras inte själva kraften utan bara dess verkan (beroende på var den appliceras.) Detta leder till begreppet vektor som man kan se som en pil i en viss riktning. Pilens längd anger vektorns storlek (d v s motsvarar kraftens styrka) och vektorn blir densamma om man flyttar den utan att ändra vare sig dess riktning eller dess storlek. Om vi då flyttar vektorn så att den utgår från origo i ett tredimensionellt koordinatsystem, så ser vi att en vektor kan identifieras med koordinaterna för pilens spets, (a, b, c). Längden på vektorn blir då enligt avståndsformeln (Pythagoras!) $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Observera att en vektor inte har något bestämt läge utan att alla vektorer med samma längd och samma riktning är EN OCH SAMMA vektor.

Vektorer betecknas här med ett streck över vektorn (kan ju ej förväxlas med konjugat). För att ange en vektors längd använder man absolutbeloppstecken. Vi har alltså $|\bar{v}| = |(a,b,c)| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$ För dessa nya objekt som vi kallat vektorer ska vi nu definiera vissa räkneregler. Vad det gäller multiplikation av vektorer med ett tal (k) och addition av vektorer gäller samma regler som för talpar d v s $k(a,b,c) = (ka,kb,kc)$ och t e x $(3,-2,1)+(4,2,-3) = (7,0,-2)$.

Geometriskt innebär multiplikation med k att vektorn blir $|k|$ gånger längre och är $k<0$ så kastar vektorn dessutom om riktning och kommer att peka åt rakt motsatt håll. Är $k=0$ får man den s k nollvektorn, som är den enda vektor vars riktning är helt obestämd.

Att addera vektorer motsvaras geometriskt av att addera dem på samma sätt som krafter d v s summan blir diagonalen i en parallellogram. (Not. Komplexa tal adderas geometriskt på samma sätt som vektorer i planet eftersom båda additionerna är additioner av talpar.)

Innan vi går vidare så ska vi se på hur man härleder ekvationen för en linje i rymden med hjälp av vektorer. Detta är en formel som du visserligen kan lära dig utantill, men långt bättre är att förstå hur man får fram den. Vi antar att vi vet en punkt på linjen och linjens riktning. Iden är att om man adderar vektorn från origo till den kända punkten och en vektor" längs med linjen" så kommer man till en punkt på linjen. Låt $\bar{r_0} = (a,b,c)$ vara den kända punkten och $\bar{r} = (x,y,z)$ en löpande punkt på linjen. Antag vidare att linjen har samma riktning som vektorn $\bar{v} = (v_1,v_2,v_3)$ Vi får: $\bar{r} = \bar{r_0} + t\bar{v}$ Här är t ett "löpande tal" som bestämmer exakt var på linjen punkten ligger. t=0 visar t e x att (a,b,c) ligger på linjen vilket vi redan visste.

Mellan vektorer finns två helt nya operationer definierade s k skalärprodukt där resultatet är ett (reellt) tal och s k kryssprodukt som ger en ny vektor som resultat. Skalärprodukten av vektorerna $\bar{v} = (a,b,c)$ och $\bar{u} = (d,e,f)$ ger resultatet $ad+be+cf$ men kan också beräknas som $|\bar{v}|\cdot|\bar{u}|\cos\theta$ där θ är vinkeln mellan $\bar{u}$ och $\bar{v}$. En följd av detta är att om $\bar{u}$ och $\bar{v}$ är vinkelräta så blir deras skalärprodukt =0.(Kryssprodukt väntar vi med till efter vi har förklarat determinanter.)

Med hjälp av skalärprodukt ska vi nu härleda ekvationen för ett plan. Låt (x,y,z) vara en löpande punkt och (e,f,g) en fix (känd) punkt båda pkt i planet. Antag vidare att normalen till planet är $\bar{n} = (a,b,c)$ där a,b,c är kända tal. Vektorn mellan den löpande punkten och den fixa är $\bar{u} = (x-e,y-f,z-g)$. $\bar{u}$ ligger helt i planet och gör rät vinkel med $\bar{n}$. Skalärprodukten mellan $\bar{n}$ och $\bar{u}$ är alltså =0. Detta ger: $a(x-e)+b(y-f)+c(z-g) = 0$ d v s $ax+by+cz+d = 0$ (där $d = -ae-bf-cg =$ ett känt tal.)

En annan användning av skalärprodukt är den s k projektionsformeln:

$\bar{w} = (\bar{u}\cdot\bar{v})\frac{\bar{u}}{|\bar{u}|^2}$

Ex.Vektorn $\bar{v} = (1,1,5)$ projicerad på linjen x=2t, y=2t, z=0 d v s "på riktningen $\bar{u} = (2,2,0)$" ger t ex vektorn $\bar{w} = (1,1,0)$.Vi hade fått samma resultat om vi istället hade använt $\bar{u} = (-1,-1,0)$ eftersom riktningen för $\bar{w}$ finns "inbyggd" i formeln.

Med hjälp av projektionsformeln får vi lätt (vinkelräta) avståndet mellan en punkt (x_1,y_1,z_1) och planet $ax+by+cz = 0$. Eftersom formeln är så enkel (att minnas) hoppar vi över dess härledning.

Avståndet blir $|ax_1+by_1+cz_1+d|$ delat med normalvektorns längd d v s med $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. Lägg märke till att om tecknet på täljaren innan vi tar absolutbeloppet är >0 så ligger punkten på samma sida om planet som normalvektorn pekar.

Det bästa är om du ser ovanstående formler som "VERKTYG" med vilkas hjälp du kan lösa allehanda uppgifter, d v s du måste kunna KOMBINERA formlerna. Antag att du har planet $z = 4x+3y+5$ och en punkt P =(-1,0,3) och du vill bestämma koordinaterna för den punkt som fås om P ”speglas” (jfr konjugering) i planet. (Tänk efter INNAN du tittar på lösningen!)

Först bestämmer du ekvationen för normalen till planet från P. Normalen går vinkelrätt mot planet d v s i riktningen (-4,-3,1). Du får normalens ekvation x =-1-4t, y=0-3t och z=3+t. Sätter du nu in detta i planets ekvation få du en ekvation där du kan lösa ut t. Du får t=-1/13(= t_1) Sätt in t_1 i linjens ekvation. Du får x=-9/13, y=3/13, z= 38/13. I punkten S=(-9/13,3/13,38/13) skär alltså normalen planet.

Sätter du på samma sätt in $2t_1$ i normalens ekvation får du x=-5/13, y=6/13, z=37/13 vilket är spegelpunktens koordinater. (Observera att du faktiskt här också har ett alternativt sätt att bestämma avståndet mellan P och planet; det är ju lika med längden av vektorn från P till S.)

Vi övergår nu till att definiera räkneregler för de matematiska objekt som kallas ´´matriser´´. Matriser är kvadratiska eller rektangulära scheman av tal, men vi kommer huvudsakligen att hålla oss till kvadratiska matriser som t ex:

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 2 & 1 & -6 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Talen i matriserna kallas för matrisens element. Elementen är ordnade i rader och kolumner. Matrisen G ovan har ”dimensionen 3x3” d v s den har 3 rader och 3 kolumner. Matriser adderas p s s som talpar d v s elementvis, men för att detta ska gå måste matriserna förstås ha samma dimension. Att multiplicera en matris med talet k betyder att ALLA element multipliceras med k. Två matriser är lika om och endast om de har samma dimension och motsvarande element alla är lika. A och B kommer i fortsättningen att beteckna GODTYCKLIGA matriser.

Man kan också multiplicera matriser med varandra (AB) men då måste antalet kolumner i A vara lika med antal rader i B. Observera att även om båda matriserna är kvadratiska så att både AB och BA fungerar, så är det inte säkert att matrisen AB blir lika med matrisen BA. Hur gör man då för att multiplicera? Ja, för att få t ex elementet i rad 3 och kolumn 2 i matrisen AB multiplicerar man rad 3 i A skalärt med kolumn 2 i B.

Den kvadratiska matris som har ettor i ”huvuddiagonalen” och nollor överallt annars kallas för enhetsmatrisen. Den fungerar som ”en vanlig etta” i räkningarna. T ex gäller AI=IA=A eller III=I etc. Kan man dividera i matrisvärlden? Ja faktiskt, men divisionen uttrycks som en multiplikation d v s A/B skrivs som A gånger inversen till B. Inversen till B betecknas B^{-1} och $BB^{-1} = B^{-1}B = I$ gäller.(B har antagits vara kvadratisk.) För att det ska gå att dividera med en matris krävs alltså att dess invers existerar. (Villkoret för detta ska vi återkomma till.) Räkneregel:$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

För matriser finns en ”ny” operation som kallas transponering (T); den består i att vi byter rader och kolumner, d v s rad j i A blir kolumn j i A^T. Räkneregel: $(AB)^T = B^T A^T$.

Till varje KVADRATISK matris A hör ett tal som kallas för A:s determinant. Talet betecknas det A eller med ett absolutbeloppstecken kring A. Determinanten för 1x1 matriser är lika med elementet.

Determinanten för 2x2 matriser med elementen a,b,c,d i samma ordning som man läser blir ac-bd. För matriser med högre dimension ordning får man determinanten genom att ”utveckla efter en rad eller kolumn.” Om vi utvecklar G efter första raden får vi t ex:

Det G $=3(1\cdot 1-(-6)\cdot 1)-4(2\cdot 1-(-6)\cdot 1)-5(2\cdot 1-1\cdot 1) = 3\cdot(7)+4\cdot(-8)-5\cdot(1) = -16$

Förklaring: Den term som ”hör till” elementet a(i,j) får man genom att multiplicera a(i,j) dels med$(-1)^{i+j}$ dels med determinanten för den matris som blir kvar om man stryker rad i och kolumn j i den ursprungliga matrisen. (Observera att determinanten för 2x2 matriser faktiskt också är beräknad enligt denna princip.)

Om man i en matris ersätter elementen med de tal som de multipliceras med när man utvecklar enligt ovan får man TRANSPONATET till den s k adjunkten. Om man delar alla elementen i adjunkten med determinanten för den ursprungliga matrisen ger detta den ursprungliga matrisens invers. (För att inversen till en matris A ska existera krävs alltså att det A $\neq 0$.) Första raden i $(adjG)^T$ blir alltså 7,-8,1 (Jfr med utvecklingen av G ovan!). Det är en bra övning att bestämma inversen till G på detta sätt och sedan kolla att $GG^{-1} = I$ stämmer.

För determinanter finns följande räkneregler: 1. detA^T = det A d v s vad beträffar determinanten gäller allt som gäller för rader också för kolumner. 2. Om vi byter två rader (kolumner) ändrar determinanten tecken. (Av detta följer att om två rader (eller två kolumner) är LIKA så är determinanten =0.) 3. Säg att vi multiplicerar en rad i en matris med ett tal och lägger denna på detta sätt ändrade rad till en annan rad (så att BARA denna SISTA rad ändras). Denna operation (eller samma för kolumner) ändrar inte determinanten! 4. det AB = det A det B. 5. det$A^{-1} = 1/$det A. 6. Om en rad (eller kolumn) i en matris multipliceras med k så multipliceras determinanten med k.

(OBS dock att det (kA)=k^n det A eftersom kA är den (nxn) matris man får om VARJE element i matisen multipliceras med k.)

För att beräkna determinanter för nxn matriser där n>3 brukar man först förenkla matriserna genom att använda några regler ovan. Ett BRA exempel: Skriv 1,2...10 som första rad och 11,12....20 som andra rad etc till den sista raden som är 91,92...100. Determinanten för denna 10x10 matris kan lätt beräknas med hjälp av regel 3. Lägg först kolumn 1 till kolumn 3. Kolumn 3 blir nu 1+3, 11+13, 21+23,....91+93 d v s 4, 26, 46,...186 medan resten av matrisen är oförändrad. Tar vi nu -0.5 gånger ´´nya kolumn 3´´ och lägger detta till kolumn 2 får vi en matris där alla element i kolumn 2 är nollor. Utvecklar vi nu efter denna kolumn blir determinanten = 0, vilket också är värdet på determinanten för den ursprungliga matrisen.

Man kunde också gjort så att att man brutit ut 2 från ´´ nya kolumn 3´´ (enligt regel 6 baklänges”). Man hade då fått 2 gånger en determinant där kolumn 2 och kolumn 3 varit lika, varefter regel 2 gett svaret.

Cramers regel (som används för att lösa ekvationssystem där antalet obekanta är lika med antalet ekvationer) är lätt att lära sig.

$$\begin{aligned} 3x + 4y - 5z &= 3 \\ 2x + y - 6z &= 5 \\ x + y + z &= 1 \end{aligned}$$

kan med hjälp av matrisen G skrivas G$(x, y, z)^T = (3, 5, 1)^T$ (Utför du matrismultiplikationen ser du att detta stämmer.) G är den s k koefficientmatrisen. Om G_j är den matris som fås om j:te kolumnen i G ersätts med $(3, 5, 1)^T$ j=1,2,3 så gäller: x= detG_1 /det G, y=det G_2 /detG och z=det G_3 /detG

Av detta kan man dra en del allmänna slutsatser om ekvationssystem. Har koefficientmatrisen determinanten noll, så måste alla determinanterna i täljarna också vara noll för att det ska finnas en lösning och i så fall finns oändligt många lösningar. Är ekvations systemet å andra sidan homogent (d v s alla högerled=0) finns det oändligt många lösningar om determinanten för koefficientmatrisen är = 0 och bara EN (den triviala d v s alla lösningar =0) om determinanten ej är =0.

Om man vet hur man utvecklar en determinant är det lätt att komma ihåg hur kryssprodukt beräknas. Man skriver e_x, e_y, e_z som första rad följt av koordinaterna för den ena vektorn som andra rad och slutligen koordinaterna för den andra vektorn som tredje rad. Därefter utvecklar man efter första raden. Ett exempel: (2,1,-6)x(1,1,1)=(7,-8,1). Jfr med utvecklingen av G ovan!

Längden av den vektor som man får vid en kryssprodukt mellan $\bar{u}$ och $\bar{v}$ är $|\bar{u}| \cdot |\bar{v}| \sin\theta$ där θ är vinkeln mellan vektorerna. (1,0,0) x (0,1,0)= (0,0,1) och (0,1,0) x (1,0,0)= (0,0,-1) visar (i princip) vilken vektorns riktning blir. Om vektorerna är parallella så är sinus för vinkeln mellan dem =0 och resultatet av en kryssprodukt lika med nollvektorn (som ju inte har någon riktning).

Kryssprodukt är ett annat bra verktyg som används t ex i följande exempel.Linjerna x=2-3t,y=1+t,z=2-2t och (x,y,z)=(4,1,1)+s(6,-2,4) ligger i planet ax+by+cz+d=0. Bestäm a,b,c och d.

Lösning: Hade linjerna inte varit parallella så hade man genom att ta kryssprodukten av linjernas riktningar d v s (-3,1,-2)x(6,-2,4) kunnat få normalen till planet d v s (a,b,c). Nu är linjerna parallella och då blir kryssprodukten =nollvektorn vilket inte ger något. Tag istället t ex t=0 och s=0 vilket ger en punkt på var linje. Kalla vektorn mellan dessa punkter för $\bar{w}$.Vi har: $\bar{w}$=(2,1,2)-(4,1,1)=(-2,0,1). Tar vi nu kryssprodukten mellan $\bar{w}$ och linjernas riktning d v s (-2,0,1)x(-3,1,-2) ger detta (a,b,c). Eftersom alla punkterna på linjerna ligger i planet, ligger t ex (4,1,1) i planet. Genom att sätta in den punkten i planets ekvation får vi värdet på konstanten d. Planets ekvation blir x+7y+2z-13=0. (Detaljerna får läsaren själv fylla i.)

NYA FUNKTIONER.

Från skolkursen vet du att cos v resp. sin v definieras som x resp. y-koordinaten för en punkt P på en cirkel med radien =1 och medelpunkt i origo (den s k enhetscirkeln). Vinkeln x mäts därvid inte i grader utan i ett ´´bågmått´´ där 2π (=cirkelns omkrets) motsvarar 360 grader. Att en negativ vinkel svarar mot en rotation i negativ led (d v s medurs) vet du säkert också. Enkla samband som cos(-v)= cos v och sin (-v)= - sin v följer direkt från denna definition. Skulle du vilja veta vad t ex sin (-1050 grader) är, går det också bra. Utgående från x-axeln roterar man först 2 varv medurs (=-720 grader=-2π) och sedan ytterligare -330 grader. Man har då hamnat i punkten P=($\sqrt{3}$/2,1/2) så det sökta är 1/2.

Att fråga: ´´Vad är 2 -logaritmen för 32?´´ är samma som att fråga: ´´Vilket tal ska 2 upphöjas till för att det ska bli 32?´´ Svaret är alltså 5 (eftersom 2^5=32.) När det gäller de "nya" funktionerna arcsin, arccos, arctan och arccot kan samma frågeteknik användas. Att fråga "Vad är arcsin (1/2)?" är samma som att fråga: "Vilken vinkel har sinus = 1/2?" På denna fråga finns det dock oändligt många svar. (-1050 grader är t ex ett av dem, j f r ovan). Svaret blir dock entydigt om man håller sig till de värden som funktionen y= arcsin x kan anta nämligen$-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$. Man får alltså arcsin (1/2)=π/6 (=30 grader men OBSERVERA att svaret ska anges i radianer).

arcsin x är inversen till funktionen sin x. För att en funktion alls ska ha en invers krävs att den är strängt växande eller strängt avtagande. Det finns därför ingen invers till sin x "i sin helhet" utan man måste begränsa sig. Man har valt att ta inversen för den del av sin x som svarar mot $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ vilket betyder att de värden som y=arcsin x kan anta (d v s den funktionens värdeförråd) blir just $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$.

På liknande sätt får man $0 \leq \arccos x \leq \pi$, $-\pi/2 < \arctan x < \pi/2$ och 0 <arccot x< π

DERIVATOR.

Kedjeregeln är en slags "ask i ask-regel" som man måste kunna. Ett bra exempel är $y = e^{\sin^3 x}$ som ger

y´=$e^{\sin^3 x}(3\sin^2 x)(\cos x)$ där man i tur och ordning använt D(e^u),D(u^3)och D(sin u) vilket man kan se som "3 askar i varandra".

Att minnas hur man deriverar en produkt är lätt. (uvw)´= u´vw + uv´w + uvw´ visar hur man deriverar en produkt av 3 funktioner. Ex. $D(x^3) = D(xxx) = 1 \cdot x \cdot x + x \cdot 1 \cdot x + x \cdot x \cdot 1 = 3x^2$ som man förstås också kunde fått direkt.

Har man glömt hur f(x)/g(x) deriveras kan man se det som f(x) gånger $g(x)^{-1}$ istället och derivera det som en produkt. (Man har ju D(g(x)) = -g´(x)/$(g(x))^2$ enligt kedjeregeln.)

Derivatorna av arc-funktionerna behöver man inte lära sig utantill utan dom kan man härleda när de behövs. Ex: Från y=arcsin x får man (genom att ta sinus för båda sidorna) sin y =x. Deriverar man nu (med avseende på x) på båda sidor får man också enligt kedjeregeln (fast det nu kallas implicit derivering): y´cos y = 1. Från "trigonometriska ettan" får man cos y=$\sqrt{1 - \sin^2(y)} = \sqrt{1 - x^2}$ och alltså D(arcsin x)= $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Derivator kan användas till att bevisa olikheter. Ett (enkelt) exempel: Visa att x>1+ln x för x>1.

Lösning: Vi inför f(x)=x-ln x-1, f'(x)=1-1/x >0 för x> 1 visar att f(x) är växande för x> 1. Eftersom f(1)=0 följer av detta att f(x)>0 för x>1 d v s att x-ln x -1>0 för x>1 vilket visar den givna olikheten.

En annan användning av derivator är vid serieutveckling. Antag att vi skulle vilja uppskatta e^x med hjälp av ett fjärdegradspolynom d v s vi vill att $e^x \approx a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ ska gälla. Hur ska koefficienterna då väljas ? Sätter man x=0 får man $e^0 = a_0$ d v s $a_0 = 1$. Deriverar man får man $e^x \approx 4a_4x^3 + 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1$ och sätter man x=0 i detta får man $a_1 = 1$. Deriverar man ännu en gång får man $e^x \approx 12a_4x^2 + 6a_3x + 2a_2$. Sätter man återigen x=0 ger detta $a_2 = 1/2$. Samma procedur två gånger till ger $a_3 = 1/6$ och $a_4 = 1/24$ Om man nu vill tro på att "ett polynom med oändlig grad" skulle uppskatta e^x exakt så kan man på detta sätt få fram följande formel: $e^x = 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + x^4/4! + x^5/5! + x^6/6! + \cdots$

Om man gör precis likadant fast med sin x och cos x istället får man formlerna: $\sin x = x - x^3/3! + x^5/5! - \cdots$ och $\cos x = 1 - x^2/2! + x^4/4! - \cdots$ (De sista serierna är lätta att minnas, i båda tar man varannan av e-serien med växlande tecken och genom att sätta in x=0 kan man ta reda på hur serien börjar.) Om du vill avsluta serien t ex e^x efter 4 termer använder du symbolen "ordosymbolen" O(x^4) som betecknar alla de följande termerna. Man skriver alltså:$e^x = 1 + x + x^2/2! + x^3/3!$+O($x^4$)

Not: Om man accepterar att serieutvecklingarna av e^x och sin x också fungerar med ix istället för x kan man (formellt) härleda Eulers fantastiska formel $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.

En annan vanlig användning av derivering är då man använder L'Hospitals regel för att beräkna ett gränsvärde.Ett lärorikt exempel är följande: $\lim_{x \to 0+}(x^x)$ söks.(0+ betyder att x närmar sig noll via positiva värden.)

Lösning. Först skriver man om x^x med hjälp av definitionen av ln: $x^x = e^{ln(x^x)}$. En log-lag plus en omskrivning ger $ln(x^x) = xlnx = \frac{lnx}{1/x}$ Detta sista är på formen ∞/∞. (Egentligen på formen - ∞/∞ eftersom ln (0) =-∞ men detta spelar ingen roll.) Nu kan L'Hospitals regel användas och deriverar man både i täljare och nämnare får man $\lim_{x \to 0+} \frac{lnx}{1/x} = \lim_{x \to 0+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \to 0+}(-x) = 0$ Eftersom e-funktionen är kontinuerlig blir det sökta gränsvärdet e^0=1.

L´Hospitals regel fungerar också då gränsvärdet är på formen ´´0/0´´. Ett enkelt exempel är $\frac{\sin x}{x}$ som går mot 1 då x går mot 0 eftersom cos (0)= 1.

INTEGRATION.

Substitution är ofta en bra utväg när en integral ser svår ut. Ex. $\int (x^2 + x)\sqrt[3]{1-2x}$ dx verkar ju otrevlig men sätter vi t=1-2x, (dt=-2dx) övergår den i något mycket lättare. GLÖM INTE att byta gränser när du gör en substitution.

Har man glömt formeln för partialintegrering går den att härleda från (uv)´= u´v + uv´. Om man integrerar båda led får man uv=∫u´v + ∫uv´ varur ∫u´v= uv - ∫uv´. uv är här ´´den utintegrerade biten´´. Antag att ∫ ln x ska bestämmas. Vi skriver det då som 1· ln x och med 1 som u´ och ln x som v får man att ∫ 1· ln x = x · ln x - ∫ x·(1/x) dx och alltså ∫ ln x = xlnx - x. (Egentligen plus en konstant också.) Kontrollera gärna genom att derivera.

Vad det gäller integraler med trigonometriska integrander vill vi påminna om följande knep: $\int \sin v \cos v dv = \int \frac{\sin 2v}{2} dv$. Man bör också kunna $\cos 2v = \cos^2 v - \sin^2 v =$ (trigonometriska ettan) $= 2\cos^2 v - 1 = 1 - 2\sin^2 v$. Från detta får man t ex $\int \cos^2 v dv = \int \frac{\cos(2v)+1}{2} dv$. Svår verkar $\int \sin^3 v dv$, men med hjälp av trig.ettan blir den $= \int (1-\cos^2 v)\sin v dv$ som lätt löses genom substitutionen $t = \cos v$.

En del integraler kan man bara klara om man känner till partialbråksuppdelning och hur man uppdelar ett polynom i faktorer. Säg t ex att integralen av $\frac{x^4+x^3+3}{x^5-x^3-x^2+1}$ ska bestämmas. Vi börjar med att lösa den ekvation vi får om nämnaren sätts =0. Man gissar att en rot är =1 och eftersom detta stämmer kan man dividera med (x-1). Detta ger en fjärdegradsekvation. Vi gissar återigen på 1 och då detta också stämmer kan man dela med (x-1) en gång till. Detta ger en tredjegradsekvation. Gissar vi nu på 1 stämmer det inte, men gissar vi på -1 blir det rätt. Vi delar alltså med (x+1) och får ekvationen $x^2 + x + 1 = 0$. Denna har komplexa rötter men behöver (i detta sammanhang) inte lösas. Det viktiga är att nämnaren kan skrivas som produkten: $(x+1)(x-1)^2(x^2+x+1)$.

Enligt teorin för partialbråksuppdelning kan man skriva $\frac{x^4+x^3+3}{(x+1)(x-1)^2(x^2+x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+x+1}$. (Lägg noga märke till hur dubbelroten och de komplexa rötterna påverkar denna ansats.) För att bestämma A kan man multiplicera båda led med x+1 och sedan (efter förkortning med (x+1)) sätta x+1=0 (d v s x=-1). Kvar i högerledet blir då bara A medan man i vänsterledet får 3/4. Genom att på samma sätt multiplicera båda led med $(x-1)^2$ och (efter förkortning med $(x-1)^2$ och (x-1)) sätta x=1 får man C=5/6. För att bestämma de kvarvarande konstanterna multiplicerar man med nämnaren i vänsterledet på bägge sidor och identifierar koefficienterna för de olika x-potenserna.

Genom partialbråksuppdelningen har man fått en summa av 4 integraler där de tre första är enkla att integrera (man får två ln-funktioner och en potens). Den sista kommer att ge en ln-funktion och en arctan, men man måste "dribbla lite" för att se detta. Se exempel 7.14 sid 249 i Analytiska metoder 1 av Elke Petermann.

OBSERVERA att om täljarens gradtal är större än eller lika med nämnarens gradtal så måste man börja med att DIVIDERA täljaren med nämnaren. Säg t ex att vi ska integrera $\frac{x^3}{1+x^2}$ resp. $\frac{x^2}{1+x^2}$.

En sådan division (med rest!) ger här: $x - \frac{x}{1+x^2}$ resp. $1 - \frac{1}{1+x^2}$ och nu är det lätt att integrera. ($D(\ln(1+x^2)) = \frac{2x}{1+x^2}$ resp. $D(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}$ gäller ju.)

Strövtåget är slut och vi har tyvärr inte hunnit med allt. Serier och differentialekvationer och också viktiga saker, men dem får du titta på själv. Hoppa ändå att du blivit lite hjälpt av det som vi trots allt har hunnit behandla och LYCKA TILL på tentan!