Hjälplapp 11.(Fler finns på: http://www.math.kth.se/ ~goranr/mattesida.htm)

Antag att du flyttar runt en kilovikt i ett kraftfält som ges av $\bar{F} = (P(x,y), Q(x,y))$ Arbetet för "en liten förflyttning" $d\bar{r} = (dx, dy)$ fås av skalärprodukten:$\bar{F}\cdot d\bar{r} = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$. Vill man nu ha totala arbetet för att flytta vikten från en punkt (A) till en annan punkt (B) längs en viss given kurva ges detta av:

$\int_A^B P(x,y)dx + Q(x,y)dy$

Detta är en s k linjeintegral (kurvintegral vore dock ett bättre namn). Kan man hitta en parameterframställning av kurvan så går en sådan integral att beräkna på samma sätt som en vanlig integral. **Tal 2** är ett BRA exempel. Du har $x = t^2$ dvs $dx = 2tdt$ och $y = t^3$ dvs $dy = 3t^2dt$. Sätt nu in detta och observera att du genom att lösa ekv-systemen $1 = t^2, 1 = t^3$ resp. $0 = t^2, 0 = t^3$ ser att t går från 1 till 0 när man (längs med kurvan) går från (1,1) till (0,0). Linjeintegralen övergår i $\int_1^0 (2t^2 - 3t^3)\cdot 2tdt + \int_1^0 (2t^2 - 4t^3)\cdot 3t^2dt$ som du lätt löser. I **tal 3** har man bara att sätta $x = t, y = t^2$ och fortsätta likadant som nyss. **Tal 4** visar hur linjeintegralen ser ut när man istället har en kurva i rymden. (Behandlingen är helt analog.) I **tal 5** måste man dela upp vägen från (0,0) till (-1,1) i två delar eftersom parametriseringen av kurvan inte blir densamma för de bägge delarna.- Man ser också att om man går samma väg fast åt motsatt håll så byter linjeintegralen tecken.

Ibland beror värdet av linjeintegralen inte på själva vägen utan BARA på dess start och slutpunkt. Vi ska se närmare på detta och gör därför först en repetition.

Storheter som dx,dy,du,dt etc kallas ju differentialer. Att DIFFERENTIERA en funktion är ungefär som att derivera fast skrivsättet är annorlunda. När du ovan kom från $y = t^3$ till $dy = 3t^2dt$, var det just en differentiering du utförde fast du kanske inte tänkte på det. Observera vidare att när t ex $y'(x)$ betecknas med $\frac{dy}{dx}$ så kan denna beteckning ses som en KVOT mellan två differentialer.

Antag nu att vi har en funktion av TVÅ variabler $u(x,y)$, men $x = x(t)$ och $y = y(t)$ gäller så i själva verket är u en funktion bara av EN variabel (t). Med derivatan med avseende på t betecknad som en kvot mellan differentialer ger kedjeregeln:

$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$. Om man här "multiplicerar bägge led med dt" så får man formeln för differentiering av u(x,y):

$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$ (*)

Antag nu att det går att hitta en funktion $u(x,y)$ som är sådan att:

$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y)$ och $\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y)$ (**)

I så fall kan linjeintegralen $\int_A^B P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ skrivas $\int_A^B \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$. Om vi nu utnyttjar (*) blir linjeintegralen $= \int_A^B du =$ (Jfr $\int_a^b dx = b - a$) $= u(B) - u(A) = u(x_1, y_1) - u(x_0, y_0)$ där vi i den sista relationen satt in koordinaterna för A och B.

I detta fall beror alltså inte linjeintegralen på vilken väg man väljer mellan punkterna utan bara på u:s värden i vägens start och slutpunkt. I **tal 9** och **10** kan man utnyttja detta genom välja en ny (enklare) väg mellan punkterna.- Om u:s partialderivator av andra ordningen är kontinuerliga så spelar det ingen roll i vilken ordning man deriverar dvs $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial u}{\partial x}) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial y})$. Med hjälp av (**) ovan får man från detta:

$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$

Detta är VILLKORET för att u ska existera. När u existerar kallas kraftfältet (vektorfältet) $\bar{F}$ för KONSERVATIVT. u kallas för POTENTIALEN och du brukar kallas för en EXAKT differential.

För att visa hur man i princip gör för att bestämma $u = u(x, y)$ löser vi följande uppgift: "Visa att vektorfältet $\bar{F} = (6x^2 + 3x^2y, x^3 + 12y^3)$ är konservativt och bestäm dess potential så att den får värdet -7 i origo."

Vi har $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = 3x^2$ och $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 3x^2$. Partialderivatorna är lika och vektorfältet $\bar{F}$ således konservativt.

Eftersom $\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y) = 6x^2 + 3x^2y$ får man (genom integrering med avseende på x): $u(x, y) = 2x^3 + yx^3 + \psi(y)$. Observera särskilt funktionen $\psi(y)$. Normalt brukar man ju bara behöva lägga till en konstant när man integrerat, men eftersom y hålls konstant när man deriverar partiellt med avseende på x är man tvungen att lägga till en FUNKTION av y istället. För att bestämma $\psi(y)$ deriverar vi u med avseende på y. Vi får: $\frac{\partial u}{\partial y} = x^3 + \psi'(y)$ Men eftersom det också gäller att $\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y) = x^3 + 12y^3$ ger detta: $x^3 + \psi'(y) = x^3 + 12y^3$ varur $\psi'(y) = 12y^3$. Integrering med avseende på y ger: $\psi(y) = 3y^4 + C$. Sånär som på en konstant har vi nu bestämt $u(x, y) = 2x^3 + yx^3 + 3y^4 + C$. Det givna villkoret $u(0, 0) = -7$ ger $C = -7$ och svaret blir: $u(x, y) = 2x^3 + x^3y + 3y^4 - 7$

GREENS SATS. Antag att Γ är en ändlig, enkel sluten kurva "dvs" en kurva som är rand till ett ändligt, enkelt sammanhängande område D. Antag vidare att integranden i dubbelintegralen nedan är kontinuerlig och att Γ genomlöpes i positiv led (=moturs). Då gäller:

$\oint_\Gamma P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_D (\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y})dxdy$

Not. Ringen på integraltecknet ovan syftar på att Γ är en sluten kurva. Om fältet är konservativt ser man att $\oint = 0$ gäller för VARJE sluten kurva Γ, men som man t ex ser av **tal 6** kan det finnas slutna kurvor med linjeintegral =0 även fast fältet inte är konservativt.

Ibland (som i **tal 7** vilket rekommenderas för lösning) kan Greens sats vara det enda praktiska sättet att bestämma en linjeintegral. (Som en slags kontrast till tal 7 finns tal 4 på dagens 5/5. Här är Greens sats ett sämre alternativ än en direkt linjeintegrering.)

I en del fall kan man utnyttja Greens sats för att beräkna en linjeintegral genom subtraktion från dubbelintegralens värde. Denna "subtraktionsteknik" kan användas i **tal 8 b,c** och i tal 11b.

I **tal 11b** kan man t ex beräkna det sökta som $6\pi - \int_A^B - \int_B^C$. Här är 6π = det värde Greens sats ger när man går runt det område som begränsas av ellipsbågen, och de räta linjerna AB och BC. (A, B och C har koordinaterna (0,2),(0,0) och (3,0) respektive.) Linjeintegraler längs (eller parallellt) med axlarna är extra enkla att beräkna. Vi har t ex $\int_A^B$ = (Sätt x=0 och y=t)= $\int_2^0 3tdt$. (Det tar i tal 11 b längre tid att bestämma den sökta linjeintegralen direkt även om detta också är möjligt. Inför i så fall $x = 3\cos t, y = 2\sin t$ för att parametrisera ellipskurvan.)

Några klargöranden. (Svar på elevfrågor.)

1.Fältet är konservativt också då $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}$ och $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ båda är lika med SAMMA konstant (t ex båda =0).

2. När linjeintegralen görs om till en vanlig enkelintegral kan den undre gränsen i denna bli större än den övre. När linjeintegralen (genom Greens formel) görs om till en dubbelintegral så är däremot alltid de undre gränserna i integralerna mindre än de övre. Den enda påverkan vägens riktning i linjeintegralen har på dubbelintegralen är att om man går MEDURS i linjeintegralen så dyker det upp ett minustecken framför dubbelintegralen. - $\iint_D dxdy$ = Arean av D. (Jfr $\int_a^b dx$ = längden av integrationsintervallet.)