HJÄLPLAPP 12. (För fler se: www.math.kth.se/∼goranr/mattesida.htm)

Den praktiska användningen av linjeintegral och ytintegral (=flödesintegral) är helt olika, men vad det gäller den matematiska behandlingen finns där två ”beröringspunkter” som kan göra det hela lättare att minnas:

1. Precis som linjeintegralen kunde göras om till en enkelintegral genom en parameterframställning så kan flödesintegralen genom en (analog) parametrisering göras om till en dubbelintegral.

2. Precis som en linjeintegral över en sluten kurva kunde skrivas som en dubbelintegral över det inneslutna området så kan flödesintegralen över en yta skrivas som en trippelintegral över den inneslutna volymen.

Eftersom man lätt hinner glömma en del ”mellan varven” ska vi först göra en grundlig repetition.

Som du nog minns är x=x(t),y=y(t) parameterframställningen av en kurva i planet. Om vi inför en vektor $\bar{r}$=(x,y) så kan man skriva $\bar{r}$=(x(t),y(t)) eller kortare $\bar{r} = \bar{r}(t)$.

På motsvarande sätt är x=x(u,v),y=y(u,v),z=z(u,v) parameterframställningen för en YTA i rymden som vi kan skriva som $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$. Vektorerna $\frac{\partial \bar{r}}{\partial u}$ och $\frac{\partial \bar{r}}{\partial v}$ ligger båda ”i” ytan. Kryssprodukten mellan dem blir därför en vektor som är vinkelrät mot planet dvs vi har:
$\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v}$=ytans normal $= \bar{N}$

Om ytan är given i formen z=z(x,y) kan den skrivas på parameterform: x=u,y=v,z=z(u,v). Man får då $\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} = (1, 0, z'_u) = (1, 0, z'_x)$ och $\frac{\partial \bar{r}}{\partial v} = (0, 1, z'_v) = (0, 1, z'_y)$ och ytans normal $\bar{N}$ blir $(1, 0, z'_x) \times (0, 1, z'_y) = (-z'_x, -z'_y, 1)$

(Skriver du $(\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z)$, $(1, 0, z'_x)$ och $(0, 1, z'_y)$ under varandra och utvecklar efter första raden så får du: $\bar{e}_x(0 \cdot z'_y - z'_x \cdot 1) - \bar{e}_y(1 \cdot z'_y - 0 \cdot z'_x) + \bar{e}_z(1 \cdot 1 - 0 \cdot 0) = \bar{e}_x(-z'_x) + \bar{e}_y(-z'_y) + \bar{e}_z(1)$. vilket ger den sökta kryssprodukten.)

Till saken! På sidan av en vattenreservoar bildas plötsligt ett hål. Hålets (tredimensionella) form kan ses som en yta i rymden. Den mängd vatten som flödar ut per tidsenhet anges genom FLÖDESINTEGRALEN $\iint_S \bar{F} \cdot \hat{n} d\sigma$. Här är $\bar{F}$ = ((P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)) den hastighet (och riktning) som vattnet strömmar ut med. ($\hat{n}$ förklaras nedan.) OBS. Vi har valt att skriva $d\sigma$ istället för dS eftersom detta är det vanliga beteckningssättet i kurslitteraturen.

Följande formel visar hur en flödesintegral kan beräknas med hjälp av en dubbelintegral:
$\iint_S \bar{F} \cdot \hat{n} d\sigma = \pm \iint_D \bar{F} \cdot \bar{N} dxdy.(*)$

Vilket av tecknen i högerledet ska man nu välja? $\bar{N} = \bar{N}(x, y, z)$ är den normal till ytan som fås genom en kryssprodukt, men även $\hat{n} = \hat{n}(x, y, z)$ är en normal till ytan. För samma punkt (x,y,z) på ytan har då $\hat{n}$ och $\bar{N}$ antingen precis samma riktning eller är rakt motsatt riktade. Gäller det förstnämnda ska plus-tecknet väljas annars minus-tecknet.

Tänker du efter inser du att det räcker med att EN koordinat i $\hat{n}$ har SAMMA TECKEN som motsvarande koordinat i $\bar{N}$ för att plustecknet ska väljas.

Är ytan t ex given som z=z(x,y), där (x,y) varierar över ett område D i x-y planet, så får man ju $\bar{N} = (-z'_x, -z'_y, 1)$ där z-koordinaten är positiv. Talformuleringar som ”$\hat{n}$ har positiv z-komponent” eller ”$\hat{n}$ gör spetsig vinkel med z-axeln” betyder då att plus-tecknet ska väljas. Även en till synes vag formulering som ”$\hat{n}$ uppåtriktad” kan tolkas rätt om man har förstått hur det fungerar. (Se tal 4 och 6b.)

Om vi utför skalärprodukten i högra ledet av (*) får vi formeln:

$\iint_S \bar{F} \cdot \hat{n} d\sigma = \pm \iint_D (P(-z'_x) + Q(-z'_y) + R) dxdy.$ (**)

När ytan är given i formen z= z(x,y) kan flödesintegralen via (**) beräknas som en dubbelintegral. D är då projektionen av ytan på x-y planet. I tal 1,3,4 och 6c är D given så där är problemet bara att beräkna dubbelintegralen.(I tal 4 är D: $x^2 + y^2 = 1$.) I tal 2,5,6a och 6b får man D genom att sätta z=0. Som exempel ser vi på tal 6b. Sätter vi z=0 i 2x+3y+6z=12 och löser ut y får vi: $y = 4 - \frac{2x}{3}$. (Du bör rita upp D för att få rätt gränser i dubbelintegralen.)

I tal 8 och 6d får man D genom att eliminera z mellan villkoren. I tal 8 får man att $z = 1 + x^2$ och $z = 2x^2 + y^2$ ger $1 + x^2 = 2x^2 + y^2$ varur D: $x^2 + y^2 = 1$. Och i tal 6d ger z=4 och $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ på samma sätt D: $x^2 + y^2 = 9$.

Det är inte alltid (**) går att använda utan ibland måste man istället använda (*). Försöker vi t ex i tal 10 lösa ut z och välja x och y som parametrar, får vi stora problem.

Istället ska man lösa ut $y = \sqrt{4 - x^2 - z^2}$ och välja x och z som parametrar. Ytans normal $\bar{N}$ beräknas på samma sätt som i den inledande repetitionen (genomför räkningarna som övning!). Vi får $\bar{N} = (y'_x, -1, y'_z)$. Eftersom normalen till sfärytan anges vara riktad ut ur sfären betyder detta (här) att normalen har positiv y-komponent. Vi ska alltså välja minustecknet i (*). Vi får efter skalär multiplikation i högerledet det sökta =

$\iint_D z^2 dxdz$ där D: $x^2 + z^2 = 1$ Polära kordinater $(x = r\cos v, z = r\sin v, dxdz = rdrdv)$ ger snart svaret. (Använd $\sin^2 v = \frac{1}{2}(1 - \cos 2v)$.)

I andra sammanhang kan ytan S vara sluten. Vi har t ex en energikälla innesluten av S och söker energin per tidsenheten som strömmar ut genom S. Då gäller Gauss sats:

$\oiint_S \bar{F} \cdot \hat{n} d\sigma = \pm \int\int\int_V \text{div}\bar{F} dxdydz.$ (***)

Här är V den volym som innesluts av S och div$\bar{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$. Plustecknet används när ytans normal $\hat{n}$ är riktad ut från ytan. Observera ringen på integraltecknen i vänsterledet som markerar att ytan är sluten. (Detta är dock ingen obligatorisk beteckning.)

Tal 7 a,b,c,d är exempel på direkt användning av (***). Främst gäller det att sätta rätt gränser i trippelintegralen och att kunna beräkna div $\bar{F}$. I tal 7c får vi t ex det sökta = $\int_{z=0}^{1} \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{2-2x} \text{div}\bar{F} = \int_{z=0}^{1} \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{2-2x} (2x - 2z)$dx dy dz etc.

I tal 5 kan man använda (***) för att få en enklare lösning, men i så fall bör man kunna formeln för volymen av ett klot. Vi kompletterar först halvklotet i tal 5 med "bottenytan": z=0, $x^2 + y^2 = 1$. Flödet ut genom denna bottenyta blir noll enligt (**) eller (*). (z=0 ger ju $\bar{N} = (0, 0, 1)$ varav $\bar{F} \cdot \bar{N} = 0$) Det sökta blir därför lika med flödet ut från den volym (=V) som innesluts av den ursprungliga halvklotsytan och dess "bottenyta". Eftersom div $\bar{F} = 1$ ger Gauss sats: Sökt=$\int\int\int_V dxdydz$= volymen av V = volymen av ett halvklot med radien ett = $\frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$.

Tal 9 kan lösas med Gauss sats, men beräkningen av trippelintegralen kräver införandet av sfäriska koordinater, så det är kanske bäst med en fullständig lösning. Eftersom $|\bar{r}|^2 = x^2 + y^2 + z^2$ och $\bar{r} = (x, y, z)$ får vi: $\bar{F} = (\frac{x}{x^2+y^2+z^2}, \frac{y}{x^2+y^2+z^2}, \frac{z}{x^2+y^2+z^2})$ och div $\bar{F} = \frac{x^2+y^2+z^2-2x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} + \frac{x^2+y^2+z^2-2y^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} + \frac{x^2+y^2+z^2-2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} = \cdots = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}$. Med V: $9 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 36$ blir det sökta: $\int\int\int_V \frac{1}{x^2+y^2+z^2}$dxdydz.

Införes sfäriska koordinater, $x = r\sin\theta\cos v, y = r\sin\theta\sin v, z = r\cos\theta$, dxdydz=$r^2\sin\theta$ drdθdv, övergår det sökta i: $\int_{r=3}^{6} \int_{v=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta$ drdvd$\theta = \cdots = 12\pi$.