LÄS DETTA FÖRST. Avsikten med dessa "hjälplappar" är att på ett kortfattat sätt orientera om den TEORI som behövs för att klara lappskrivningen. Fler hjälplappar finns på http://www.math.kth/∼goranr/mattesida.htm Det kan vara bra att ladda ner de hjälplappar som hör till ett moment som man missat.

HJÄLPLAPP 13. (Hör till Dagens 17/5.)

Att bestämma en potential "i rummet" är inte mycket svårare än att bestämma en potential i planet. (Se hjälplapp 11.) För att illustrera tekniken löser vi tal 2. Om området är sammanhängande och "utan hål" räcker rot$\bar{F} = \bar{0}$. för att det ska finnas en potential. Genom att skriva $\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z$, $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ och $\bar{F}_x, \bar{F}_y, \bar{F}_z$ under varandra och utveckla efter första raden får vi efter lite deriverande: rot $\bar{F} = \bar{0}$.

Man vet nu att det finns en funktion U=U(x,y,z) som uppfyller grad U=$\bar{F}$ dvs:

$U'_x = 2xe^{-y}$ (1) $U'_y = -\cos z - x^2 e^{-y}$ (2) $U'_z = y \sin z$ (3)

Integration med avseende på x av (1) ger $U = x^2 e^{-y} + \psi(y, z)$. Deriveras detta med avseende på z och (3) används får man: $\psi'_z(y, z) = y \sin z$ varur $\psi(y, z) = -y \cos z + \varphi(y)$. Vi har alltså $U = x^2 e^{-y} - y \cos z + \varphi(y)$.(*)

Deriveras detta med avseende på y och (2) används får man $\varphi'(y) = 0$ varur $\varphi(y) = C$. Villkoret $U(1, 0, \pi) = 3$ ger C=2 och vi får svaret $U = x^2 e^{-y} - y \cos z + 2$.

Observera att det inte spelar någon roll i vilken ordning man utnyttjar villkoren (1), (2) och (3). Vi hade lika gärna kunnat starta med att integrera (3) med avseende på z eller välja att utnyttja (2) efter det att vi integrerat (1). Man börjar dock alltid med en integration. Skriv gärna upp hur U ser ut när du utnyttjat två samband (jfr (*) ovan). Det blir då överskådligare när du utnyttjar det tredje villkoret.

Skriv ut argumenten i de okända funktionerna du får "på vägen", dvs skriv t ex $\psi(y, z)$ istället för bara ψ. Då är det lättare att se när du räknat fel. Om du t ex får $\psi(y, z)$ lika med ett uttryck där x finns kvar beror detta antingen på att du räknat fel eller på att någon potential inte existerar. (Ett alternativt sätt att avgöra om en potential existerar är därför att helt enkelt försöka räkna fram den!)

Tal 1,3 och 4 bör du nu kunna klara på egen hand. Glöm inte att utnyttja potentialen när du ska beräkna linjeintegralerna i tal 3 och 4. Den sökta integralen i tal 3 kan visserligen beräknas direkt men bra mycket enklare är att bestämma den som U(-1,0,π)-U(1,0,0).

För att klara tal 5 (och tal 5 på dagens 24/5) måste man veta hur grad, rot och div är definierade samt (förstås) kunna derivera. För att bestämma "rot" måste man dessutom kunna kryssprodukt. (Jfr ovan.)

Tänk på att "grad" kräver ett skalärfält (dvs "ett tal") som "argument", medan rot och div måste följas av en vektor. Håll sedan också i minnet att resultatet av "div" är ett skalärfält medan "rot" och "grad" ger en vektor. (Egentligen bör man överallt säga vektorfält istället för vektor.) Så t ex är grad 0=$\bar{0}$ korrekt medan grad $\bar{0}$ inte har någon mening.

Personligen tycker jag det är klarare att beteckna vektorer med ett streck över istället för att skriva dem i fetstil. Absolutbelopp kan man markera genom att utelämna strecket, men ännu tydligare är att använda absolutbeloppstecken. Vi har t ex $\bar{r} = (x, y, z)$ och $r = |r| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Många frågade hur r^3 (i tal 5) skulle tolkas. Det är samma som $|r|^3$ dvs $= (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$. Vi räknar tal 5c och lämnar 5a och 5b som övning åt läsaren.

Först beräknas grad $r^3 = (\frac{\partial(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}{\partial x}, \frac{\partial(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}{\partial y}, \frac{\partial(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}{\partial z}) = (3x(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}, 3y(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}, 3z(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}) = 3|r|(x, y, z) = 3|r|\bar{r}$. Skalärprodukten mellan $\bar{r}$ och grad r^3 blir därför $= \bar{r} \cdot 3|r|\bar{r} = 3|r|\bar{r} \cdot \bar{r} = 3|r||r|^2 = 3|r|^3$. Slutligen får vi grad $3|r|^3$=3 grad$|r|^3$= (enligt samma räkning som förut)=$9|r|\bar{r}$.

HJÄLPLAPP 14. (Svarande mot Dagens 24/5.)

Massintegraler.

1. Antag att vi har en tunn jämntjock tråd vars form kan beskrivas som en kurva Γ i planet. Trådens täthet (mätt i gram/LÄNGDENHET eftersom tråden var jämntjock!) varierar enligt funktionen f(x,y). Hur många gram väger tråden? En "liten bit" av tråden är ds lång och väger f(x,y)ds gram. Totala vikten av tråden blir då:

$\int_\Gamma f(x,y)ds$

Eftersom ds=$\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$ enligt Pythagoras sats, kan integralen ovan beräknas som en vanlig linjeintegral genom att man parameterframställer kurvan dvs inför x=x(t), y=y(t). Ovanstående kan förstås generaliseras till en tråd vars form beskrivs som en kurva i rymden. Man har då ds=$\sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2}$

OBS. Om man sätter f=1 i formlerna ovan ger detta LÄNGDEN av tråden.

Räkna som övning tal 1 och 2. (Ledning till tal 2: x=at, y=bt, z=ct.)

2. Antag nu att vi på samma sätt har en tunn jämntjock "sköld" vars form kan beskrivas som en yta S i rymden. Sköldens täthet (nu mätt i gram/ytenhet) varierar enligt funktionen f(x,y,z). Vad väger skölden? En "liten bit" av skölden har ytan dσ och väger f(x,y,z)dσ gram.(För att det bättre ska stämma med de beteckningar vi använt tidigare skriver vi dσ istället för dS.) Totala vikten av skölden blir:

$\iint_S$ f(x,y,z)dσ

Antag att ytan S parameterframställs genom $\bar{r} = \bar{r}(s,t)$, där $(s,t)\varepsilon D$. Massintegralen ovan kan då räknas ut som en dubbelintegral genom formeln:

$\iint_S$ f(x,y,z)dσ=$\iint_D$ f(x(t,s),y(t,s),z(t,s))$|\bar{N}|$dtds (*)

Här är $\bar{N}$ normalen till ytan dvs vi har $\bar{N} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial s}$

Ett specialfall av detta är då ytan är given i formen z=z(x,y) där (x,y)εD. Enligt hjälplapp 12 har vi då $\bar{N} = (-z'_x, -z'_y, 1)$ och vi får:

$\iint_S f(x,y,z)d\sigma = \iint_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{{z'_x}^2 + {z'_y}^2 + 1}$ dxdy (**)

OBS. Om man sätter f=1 i (**) ger detta YTAN av S. Genom att uppfatta f(x,y,z) som resultatet av skalära produkten $\bar{F} \cdot \hat{n}$ och utnyttja $\hat{n} = \frac{\bar{N}}{|\bar{N}|}$, kan man vidare visa att formlerna ovan kan härledas från motsvarande formler för flödesintegraler. (Något $\pm$ tecken blir det dock inte eftersom $\hat{n}$ och $\bar{N}$ alltid är lika riktade när det handlar om massintegraler.)

I tal 4a och b är ytan given som z=z(x,y) så där kan (**) ovan direkt användas, något som läsaren själv kan klara. Tal 4c är lite svårare så där ska vi ge lite hjälp. Det som söks är: $\iint_S$ (x+y+z) dσ där S är ytan: 0≤z≤2, $x^2+y^2=9$, $x \geq$0.

För att parameterframställa ytan sätter vi $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$ och z=s. Vi bestämmer normalen $\bar{N}$ på det vanliga sättet dvs $\bar{N} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial s} = (-3\sin t, 3\cos t, 0) \times (0,0,1) = \cdots =$ $(3\cos t, 3\sin t, 0)$. Detta ger $|\bar{N}| = \sqrt{(9\cos^2 t + 9\sin^2 t + 0^2)} = 3$ och (*) ovan ger sökt $=$ $\int_{s=0}^{2}\int_{t=-\pi/2}^{\pi/2}(9\cos t + 9\sin t + 3s)dtds = \int_{s=0}^{2}\int_{t=-\pi/2}^{\pi/2} 9\cos t dtds + \cdots = 36+0+6\pi = 36+6\pi$. (OBS. D är här ett område i "s-t planet",som ligger "för sig"; denna situation har vi inte haft tidigare men det är ingenting särskilt med den.)

Inga nya kunskaper behövs för att lösa tal 5. Det räcker med det som står i slutet av hjälplapp 13.