LÄS DETTA FÖRST: Talnumren syftar på dagens 24/1-27/1. För dagens 31/1-3/2 finns (på slutet) bara det viktigaste av teorin. För att förstå den bör du dock läsa HELA denna skrift. // betyder att rader i en matris eller ekvationer som står efter varandra ska läsas som om de stod UNDER varandra. T ex A=(a b//c d) medför $A^{-1} = \frac{1}{detA}$(d -b//-c a) som är bra att kunna. (Den metod som ligger bakom detta samband fungerar även för 3x3 matriser; se exempel 6.8 sid 197 i kursboken.) Index-beteckningarna if, fie etc är mina egna. De gör det lite lättare att hålla ordning på det hela. Vektorer betecknas med ett streck över. Om en koordinat avses skrivs detta vågrätt t ex (2,1) men avses en vektor används transponat t ex $(2,1)^T$. $\bar{0}$ betecknar nollvektorn.

Vektorerna $\bar{v}_1, \bar{v}_2 \cdots \bar{v}_n$ säges vara linjärt oberoende om $\lambda_1\bar{v}_1+\lambda_2\bar{v}_2+\cdots+\lambda_n\bar{v}_n = \bar{0}$ bara är uppfyllt när $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$. Ser man definitionen ovan som ett ekvationssystem i λ_1 , $\lambda_2 \cdots \lambda_n$ har dettas koefficientmatris vektorerna (i koordinatform) som kolumner. Villkoret för att detta (homogena) system bara ska ha (den triviala) lösningen alla λ =0 är att determinanten för koefficientmatrisen är $\neq 0$ vilket alltså är ett annat (nödvändigt och tillräckligt) villkor för att oberoende ska gälla.

I tre dimensioner är absolutbeloppet av determinanten ovan = volymen av den parallellepiped som spänns upp av vektorerna $\bar{v}_1$,$\bar{v}_2$ och $\bar{v}_3$. (Vi har här förutsatt ON-bas, se nedan för en förklaring av detta begrepp.) Om volymen är = 0, så betyder detta att de tre vektorerna ligger i samma plan dvs en av vektorerna kan skrivas som en linjär kombination av de bägge andra vilket i sin tur betyder att vektorerna är linjärt beroende. Det finns alltså många sätt att se dessa sakeroch ju fler desto bättre! Du bör nu kunna klara tal 1-3.

Vi fortsätter med ett exempel som inte finns bland dagens: Sambandet mellan baserna $\bar{f}_1, \bar{f}_2$ och $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ är $\bar{f}_1 = \bar{e}_1+3\bar{e}_2$ //$\bar{f}_2 = \bar{e}_1+2\bar{e}_2$. Vektorn $\bar{v}$ har koordinaterna (2,1) i f-basen. Vilka koordinater har den i e-basen? Med mina beteckningar har vi $\bar{v}_{if} = (2,1)^T$ och söker koordinaterna för $\bar{v}_{ie}$. Vi får $\bar{v}_{if} = 2\cdot\bar{f}_1+1\cdot\bar{f}_2 = 2\cdot(\bar{e}_1+3\bar{e}_2)+1\cdot(\bar{e}_1+2\bar{e}_2) = 3\bar{e}_1+8\bar{e}_2 = \bar{v}_{ie}$. Svaret är alltså (3,8).

Det är dock bättre att räkna med matriser. Koefficientmatrisen för sambandet mellan baserna ovan (där f uttrycks i e) är P_{fie} =(1 3//1 2).

Om vi inför $Q_{e\to f} = P^T_{fie}$ kan den (symboliska) räkning vi gjorde skrivas som en matrismultiplikation: $\bar{v}_{ie} = Q_{e\to f}\cdot\bar{v}_{if} = (3,8)^T$. Beteckningen $Q_{e\to f}$ kan tyckas ologisk men när vi uttrycker f i e byter vi ju ut den gamla basen e mot en ny bas f dvs vi går FRÅN e-bas TILL f-bas vilket är vad e→f syftar på. Vet man $\bar{v}_{ie}$ och söker $\bar{v}_{if}$ använder man istället: $\bar{v}_{if} = Q_{f\to e}\cdot\bar{v}_{ie}$ där $Q_{f\to e}$ är inversen till $Q_{e\to f}$.

Q-matriserna ovan är s k transformationsmatriser. De är alltid kvadratiska med determinant $\neq 0$. Läsaren bör nu klara tal 4 - 7 fast för säkerhets skull ska vi se närmare på 4c och 6c.

I 4c har man $\bar{g}_1 = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2$ //$\bar{g}_2 = 2\bar{e}_1 + \bar{e}_2$ och $\bar{f}_1 = \bar{e}_1 + 5\bar{e}_2$ //$\bar{f}_2 = 3\bar{e}_1 + 3\bar{e}_2$. Man söker $Q_{g\to f}$. Men denna får man lätt av sambandet: $Q_{g\to f} = Q_{g\to e}Q_{e\to f}$

För att klara 6c inför vi (x,y) som koordinaterna för $\bar{v}$ i e-basen och (u,v) som koordinaterna för $\bar{v}$ i f-basen. Sambandet $\bar{v}_{ie} = Q_{e\to f}\cdot\bar{v}_{if}$ ovan ger då (x,y)^T = $Q_{e\to f}\cdot$(u,v)^T. Eftersom $Q_{e\to f}$ =(4 3//3 2) får vi x=4u+3v//y=3u+2v. Ekvationen x-y=2 övergår då i 4u+3v-(3u+2v)=2 dvs i u+v=2 som är svaret. Tal 8 och 9 är varianter på tal 6c.

En bas där basvektorerna har längden ett och är vinkelräta är ju den vanligaste typen av bas. En sådan bas kallas för en ortonormerad bas eller kortare ”ON-bas”. Matrisen Q för en övergång mellan två ON-baser har egenskapen att $Q^{-1} = Q^T$ eller uttryckt annorlunda $Q^T\cdot Q$ = I där I är enhetsmatrisen. Detta sista ger lätt lösningen till tal 10 . Missa bara inte att $(kQ)^T = k(Q^T)$ gäller.

Säg att A är matrisen för en linjär avbildning där föremålsrum och bildrum är samma rum (vilket är den vanligaste situationen). Kolumnerna i A (sedda som vektorer) är därvid bilderna av de basvektorer som ”spänner upp” rummet. Detta betyder att om vi byter till en ny bas så kommer A att ändras. Om $Q_{f\to e}$ är transformationsmatrisen för bytet från f-bas till e-bas och A_f resp. A_e är matrisens utseende i de olika baserna gäller: $A_e = Q_{f\to e}^{-1} A_f Q_{f\to e}$ vilket gör det lätt att lösa tal 11.

Antag att A$\bar{v} = \lambda\bar{v}$ gäller med $\bar{v} \neq$ nollvektorn dvs vektorn $\bar{v}$ är parallell med sin bild. I så fall är λ ett s k EGENVÄRDE och $\bar{v}$ är motsvarande EGENVEKTOR.

För att bestämma egenvärdena löser man ekvationen det (A-λI)=0 som med ett fint namn kallas för ”sekularekvationen”. (För nxn matriser blir sekularekvationen av n:te graden, så för n>2 kan man ibland behöva knepet att gissa en rot (x=a säg) för att sedan dela ekvationen med (x-a) och få ner dess gradtal.)

När man sedan ska bestämma egenvektorer sker detta genom att man löser homogena ekvationssystem där koefficientmatrisernas determinanter är =0. Sådana system har oändligt många lösningar så minst en av ekvationerna följer av de andra eller är trivialt sann. När man ska ange de oändligt många lösningarna använder man sig av parametrar t,s etc.

Som exempel räknar vi 13 c. Sekularekvationen vållar inga svårigheter och vi får $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ och $\lambda_3 = 1$. Vi bestämmer den (eller snarare de) egenvektorer som hör till dubbelroten medan resten lämnas som övning åt läsaren. Ekvationssystemet (A-$\lambda I)\bar{v} = (0,0,0)^T$ blir med λ=0 och $\bar{v} = (x,y,z)^T$:

$$\begin{aligned} x + 0y + 2z &= 0 \\ 2x - y + z &= 0 \\ -x + y + z &= 0 \end{aligned}$$

Vi sätter nu t ex z=t och får från den första ekvationen x= -2t. Sedan ger den tredje ekvationen att y= x -z = -2t -t = -3t medan den andra ekvationen automatiskt är uppfylld. Svaret blir $\bar{v}^T = t(-2,-3,1)$ där t är ett godtyckligt tal $\neq 0$ eftersom nollvektorn inte är en egenvektor. (Obs. I svaren till tal 12 och 13 har bara egenvektorernas riktningar angetts vilket inte är korrekt som svar på de ställda frågorna.)

Om man lyckas hitta en bas av egenvektorer så kan man genom att transformera till den basen få matrisen A för en linjär avbildning att bli en diagonalmatris med egenvärdena på huvuddiagonalen. Man har som man säger diagonaliserat A. Diagonalmatriser är lätta att arbeta med, när man t ex ska multiplicera dom räcker det med att multiplicera elementen på huvuddiagonalen.

Det är inte alltid det går att hitta en bas av egenvektorer. För att duga som bas måste ju basvektorerna vara linjärt oberoende och lika många som rummets dimension. Ett tillräckligt (men inte nödvändigt) villkor är att egenvärdena är reella och olika. Det är nämligen så att egenvektorer som hör till olika (reella) egenvärden är linjärt oberoende. Har sekularekvationen t ex en dubbelrot, KAN det gå att hitta linjärt oberoende egenvektorer men det är inte säkert.

Betydligt bättre blir det dock om A är symmetrisk (dvs $A = A^T$). Då (och endast då!) går det att hitta en ON-transformation (dvs en övergång mellan två ON-baser) som diagonaliserar A. Detta är innebörden av den s k SPEKTRALSATSEN. En viktig användning av spektralsatsen är att transformera andragradsuttyck på s k huvudaxelform, vilket gör det lätt att se vad uttrycket betyder geometriskt.