INLEDNING: I nedanstående framställning förekommer dx, dy, dt etc. som beteckningar för ”oändligt små” storheter. Trots det räknar vi med dem ”som om dom inte var så små”. Läsaren gör klokt i att inte hänga upp sig på detta utan att se räkningarna som ett informellt sätt att ”härleda” viktiga formler och samband. Observera att ” används när något kanske inte är helt korrekt, men där man ändå förstår vad som menas.

Problemet att bestämma ekvationen för tangenten och normalen till en kurva i en viss given punkt har du säkert stött på tidigare. Hur lösningen ser ut beror dock på i vilken form ekvationen för kurvan är given.

Är ekvationen given på ”det vanliga sättet” dvs y=f(x) vet du säkert hur man gör. Insättningen av punktens x-koordinat i y´ ger linjens k-värde och när man nu också vet en punkt på linjen (=tangeringspunkten) är det lätt att bestämma dess ekvation. Normalens k-värde får man sedan genom att produkten av normalen och tangentens k-värden är -1.

Det finns emellertid andra sätt att ange ekvationen för en kurva och då gäller det att veta hur man kommer åt y´ för att kunna lösa problemet på samma sätt som ovan. Det är i dethär sammanhanget bra att se derivatan y´ som ”en liten förflyttning i y-led” dividerad med ”en liten förflyttning i x-led” och därför använda beteckningen dy/dx istället för y´.

För att man ska kunna ge en kurvas ekvation i formen y=f(x) krävs att det till varje x-värde bara finns ETT y-värde. Vissa kurvor, t ex de som ser ut som ”öglor”, uppfyller inte detta och brukar då istället ges i s k PARAMETERFORM dvs både dess x-koordinat och dess y-koordinat är givna som funktioner av en tredje storhet t (=parametern).

Att bestämma dy/dx i denna situation är inte svårt. Tror man på det som står i inledningen får man nämligen sambandet dy/dx=$\frac{dy/dt}{dx/dt}$. Vad vi ska göra är alltså att derivera funktionen y(t) med avseende på t och dividera detta med derivatan av funktionen x(t) också den deriverad med avseende på t. Vi får då dy/dx (dvs y') uttryckt i t. Är nu tangeringspunkten given i x,y koordinater måste vi förstås ta reda på motsvarande t-värde för att kunna bestämma y', men sedan finns inga fler (nya) problem.

Observera att när vi t ex anger att x är en funktion av t och skriver x=x(t) så används x dels som en beteckning för den beroende variabeln dels som en beteckning för själva funktionen. Skulle vi skriva y=f(x) på detta sätt blir det y=y(x), men eftersom y=f(x) är en så vedertagen beteckning behåller vi den. För att det tydligt ska framgå vilken variabel man deriverar med avseende på ska vi dock i fortsättningen skriva $y'(x), x'(t), y'(t)$ etc och aldrig använda enbart y'.

En annan variant är när kurvans ekvation är given på s k POLÄR FORM. Avståndet mellan en punkt på kurvan och origo anges då som en funktion av den vinkel linjen mellan origo och punkten gör med x-axeln. En cirkel med radien 5 och centrum i origo skulle i polär form få ekvationen r(θ)=5 för $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Dethär var ett lite urartat exempel eftersom avståndet r(θ) inte beror på θ men du förstår nog nu ändå vad polär form är.

Hur får man då tag i y´(x) när kurvan är given i polär form? Också det är ganska lätt. Vi observerar först att $x = r(\theta)\cos\theta$ och $y = r(\theta)\sin\theta$ gäller. (Jfr med polära koordinater i det komplexa talplanet.) Vi har nu fått en parameterframställning av kurvans ekvation (med θ som parameter) och kan fortsätta precis som tidigare.

LÄNGDEN AV EN KURVA (BÅGLÄNGD).

Vi ska nu ”härleda” formler för att beräkna hur LÅNG en kurva (eller en bit av den) är. Återigen måste du acceptera att vi räknar lite informellt med ”små” storheter: dx respektive dy betyder ju ”en liten förflyttning” parallellt med x respektive y-axeln. Om vi inför ”ds” som en beteckning för en liten förflyttning längs med kurvan ger Pythagoras sats (med ds som hypotenusa):$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$. För att få längden av kurvan ”lägger vi nu ihop" alla dessa små förflyttningar längs med kurvan. Kurvans längd blir då $\int ds = \int \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ (Vi har inte satt ut några gränser i integralen eftersom gränserna kommer att bero på hur stor del av kurvans längd vi vill beräkna.)

Beroende på i vilken form kurvans ekvationen är given blir nu fortsättningen olika. Har vi y=f(x) får vi $\int ds = \int dx\sqrt{1 + (dy/dx)^2} = \int \sqrt{1 + (dy/dx)^2}dx = \int \sqrt{1 + (y'(x))^2}dx$

Samma "omformningsteknik" när kurvan är given i parameterform, dvs x=x(t) och y=y(t), ger $\int ds = \int \sqrt{(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2}dt$

Och skulle kurvan vara given i polär form (dvs r=r(θ)) så är ju detta bara ett specialfall av parameterform. Efter lite räknande (som inkluderar derivation av produkter och användning av trigonometriska ettan) får man: $\int ds = \int \sqrt{(r(\theta))^2 + (r'(\theta))^2}d\theta$. Just denna formel kan det löna sig att lära sig utantill. Använd den gärna på r(θ)=5 ovan. Man får $\int_0^{2\pi} \sqrt{5^2 + 0^2}d\theta = 10\pi$, vilket inte är någon överraskning.

Om f(x) är kontinuerlig för x=a gäller $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Speciellt innebär detta att $\lim_{x\to a+} f(x) = f(a)$ och $\lim_{x\to a-} f(x) = f(a)$, dvs oavsett om man närmar sig a från höger (a+) eller från vänster (a-) så får man samma limesvärde nämligen f(a).

För att en funktion f(x,y) av TVÅ variabler ska vara kontinuerlig i punkten (a,b) gäller på motsvarande sätt att lim f(x,y)=f(a,b) ska gälla oavsett på vilket sätt punkten (x,y) närmar sig punkten (a,b). I motsats till vad som gällde vid en variabel, då det bara fanns två håll att närma sig punkten från, finns det nu oändligt många. För att visa kontinuiteten är det därför ibland lämpligt att uttrycka x och y i polära koordinater.

För f(x,y) finns ett nytt sätt att derivera nämligen s k partiell derivering. Det går till så att man bara deriverar med avseende på den ena variabeln och därvid betraktar den andra som en konstant. Deriverar man t ex f(x,y)=x^2y+y med avseende på x får man f'_x= 2xy medan derivation med avseende på y ger $f'_y = x^2 + 1$.

För att ange positionen hos en fluga som flyger runt i ett rum kan man låta origo vara i ett hörn och ange vektorn $\bar{r}$ från origo till flugan. Vektorn kommer då att vara en funktion av tiden (t). Använder man istället ON-koordinater med samma origo gäller $\bar{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))^T$. Flugans hastighet blir då derivatan av $\bar{r}$ dvs $\bar{r}'(t)$=(x´(t),y´(t),z´(t))^T och deriverar man en gång till får man flugans acceleration som också är en vektor. Med flugans "fart" menas dess hastighet utan angivande av riktning dvs längden av vektorn $\bar{r}'(t)$.