REPETITION AV DERIVERING VID EN VARIABEL. Kedjeregeln är en slags "ask i ask-regel" som man måste kunna: $D(f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Ibland kan där finnas flera askar t ex $y = e^{\sin^3 x}$ som ger $y' = e^{\sin^3 x}(3\sin^2 x)(\cos x)$. Här har man i tur och ordning använt D(e^u), D(u^3) och D(sin u) vilket man kan se som "3 askar i varandra".

Säkert minns du hur man deriverar en produkt, men kanske kommer du inte ihåg hur man deriverar en kvot. För att derivera f(x)/g(x) kan du då skriva om det som f(x) gånger $g(x)^{-1}$ och derivera detta som en produkt. (Du har ju D(g(x)) = -g´(x)/$(g(x))^2$ enligt kedjeregeln.)

Derivatorna av arc-funktionerna behöver man inte lära sig utantill utan dom kan man härleda när de behövs. Ex: Från y=arcsin x får man (genom att ta sinus för båda sidorna) sin y =x. Deriverar man nu (med avseende på x) på båda sidor får man också enligt kedjeregeln (fast det nu kallas implicit derivering): y´cos y = 1. Från "trigonometriska ettan" får man cos y=$\sqrt{1-\sin^2(y)} = \sqrt{1-x^2}$ och alltså D(arcsin x)= $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

ANDRA ORDNINGENS DERIVATOR. När man bestämt ${f'}_x$ och ${f'}_y$ kan man fortsätta derivera dessa på samma sätt dvs man kan t ex derivera ${f'}_x$ med avseende på x och därvid behandla y som en konstant. Det man då får betecknas ${f''}_{xx}$. Med denna teknik får man även ${f''}_{yy}, {f''}_{xy}$ och ${f''}_{yx}$ De två sista blir lika om de är kontinuerliga, ett villkor som för det mesta är uppfyllt.

KEDJEREGELN VID TVÅ VARIABLER. (Analogt vid fler än två variabler). Säg att vi har en funktion av TVÅ variabler f(x,y), men x=x(t) och y=y(t) gäller så i själva verket är f en funktion bara av EN variabel (t). Antag att vi vill bestämma $f'(t)$. En generalisering av kedjeregeln ovan ger:

$f'(t) = {f'}_x \cdot x'(t) + {f'}_y \cdot y'(t)$ (*)

Kedjeregeln kan generaliseras ytterligare. Antag att vi som förut har f(x,y) men nu gäller istället x=x(u,v) och y=y(u,v). Det finns nu två derivator att bestämma ${f'}_u$ och ${f'}_v$. De blir:

${f'}_u = {f'}_x \cdot {x'}_u + {f'}_y \cdot {y'}_u$ och ${f'}_v = {f'}_x \cdot {x'}_v + {f'}_y \cdot {y'}_v$

GRADIENT OCH RIKTNINGSDERIVATA. Låt (x,y) vara koordinaterna för en punkt på golvet och f(x,y) temperaturen i punkten. (Ganska orealistiskt har vi antagit att temperaturen inte beror på tiden.) Säg att en myra befinner sig i en viss given punkt (x_1, y_1) som vi förutsätter inte är en (lokal) maximumpunkt för temperaturen. Myran tänker sig att krypa "lite, lite grann" åt det håll där temperaturökningen är som störst. Den riktning som myran då ska välja är den s k gradienten av f i punkten (x_1, y_1). Detta är en VEKTOR som beräknas på följande sätt:

grad f =$({f'}_x(x,y), {f'}_y(x,y))$ med värdena på x_1 och y_1 insatta. (Vi bryr oss inte längre om att skriva transponat efter vektorns koordinater. Detta kommer ju bara in om vi ska göra matrisräkningar där vektorn är inblandad, så det kan läsaren själv hålla reda på.) Vill myran också veta hur STOR denna största möjliga temperaturökning är så bestämmer den helt enkelt LÄNGDEN av vektorn grad f.

Antag nu att myran väljer att krypa lika långt som nyss fast nu "lite, lite grann" i riktningen $\bar{v} = (a,b)$ istället. Hur stor blir då ÄNDRINGEN i temperatur? Denna ändring är ett TAL (som kan vara negativt) och man får talet genom att beräkna den s k riktningsderivatan (i riktningen(a,b)):

$\frac{a \cdot {f'}_x(x,y) + b \cdot {f'}_y(x,y)}{\sqrt{a^2+b^2}}$ med x_1 och y_1 insatta.

Divisionen med $\sqrt{a^2+b^2}$ ovan innebär att vektorn $\bar{v}$ "normerats" så att den får längden 1. Formeln kan då ses som skalära produkten mellan vektorn $\hat{v}$ (= vektorn $\bar{v}$ normerad!) och vektorn grad f vilket dels är ett bra sätt att komma ihåg det hela på, dels något som medger vissa intressanta slutsatser. Ett alternativt sätt att skriva skalärprodukten på är nämligen $|\text{grad f}| \cdot \cos\gamma$ där γ är vinkeln mellan grad f och $\hat{v}$. Som väntat är detta störst för $\gamma = 0$ dvs då myran kryper i gradientens riktning, men vi ser också att om myran inte gillar värme bör den istället krypa i en riktning rakt motsatt gradientens riktning ($\cos\pi = -1$ ju!).

Låt oss slutligen införa tiden t i vårt exempel men BARA för myran, dvs myrans position är (x(t),y(t)) medan allting annat är oförändrat. Vad betyder i så fall den derivata som vi räknade ut vid (*) ovan? Jo, denna derivata mäter ändringen i temperatur per tidsenhet sedd ur MYRANS synpunkt, dvs det myran upplever av temperaturens ändringar per tidsenhet när den kryper runt på golvet.

SERIEUTVECKLING. Om vi serieutvecklar f(x) kring x=a och bara tar med termer av första graden får vi den linjära approximationen $f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a)$. Detta betyder att vi har approximerat f(x) med tangenten i punkten x=a. Motsvarande samband när vi har två variabler blir: $f(x,y) \approx f(a,b) + f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b)$ och vad vi gjort nu är att vi approximerat f(x,y) med TANGENTPLANET i punkten (a,b). OBS. Det är vanligt att skriva "i punkten x=a" respektive "i punkten (a,b)", vad man egentligen menar är dock "i punkten (a,f(a))" respektive "i punkten (a, b, f(a,b))".

Om man vill bestämma tangentplanet till en yta i en viss given punkt via serieutveckling fungerar detta bara om ytan är given i formen z=f(x.y). En bättre metod som alltid fungerar är att skriva ytans ekvation på formen F(x,y,z)=0 och bestämma grad F=(F_x, F_y, F_z) i den givna punkten. Denna vektor är normal till tangentplanet. Planets ekvation på normalform är ax+by+cz+d=0 där vektorn (a,b,c) är = grad F i den givna punkten. Genom att sätta in tangeringspunktens koordinater kan man sedan bestämma d.

En annan användning av gradient är när två ytor skär varandra utefter en kurva och man söker tangenten till skärningskurvan i en viss given punkt. Genom att bestämma gradienten för vardera ytan i den givna punkten och sedan ta kryssprodukten mellan dessa får man tangentens riktning och eftersom den givna punkten är en punkt på tangenten är det nu lätt att bestämma tangentens ekvation.