6. LÄS DETTA FÖRST: På övningarna är tendensen att lära sig TAL utantill dominerande. Detta är inte så konstigt eftersom det på lappen har utlovats komma ett tal snarlikt något av de som finns på ”Dagens”. Kanske kan man klara lappen på detta sätt, men om man inte alls har lärt sig några PRINCIPER har man mycket liten nytta av det man lärt sig. Skulle det t ex på en senare lapp råka komma med något där man behöver kunna principer som hör till en tidigare lapp, lär det inte gå bra.

OBS att när vi nedan använder deriveringstecken innebär detta att funktionen är deriverbar, dvs vi säger det inte explicit vilket annars är det vanliga (och korrekta).

Säg att du har z=f(x,y) där x=x(u,v) och y=y(u,v). Kedjeregeln ger:$z'_u = f'_x \cdot x'_u + f'_y \cdot y'_u$. Om du nu vill t ex bestämma z''_{uu} handlar det dels om att derivera produkter dels om att använda kedjeregeln en gång till. För att det inte ska bli oöverskådligt bör man bestämma $\frac{df'_x(x,y)}{du}$ och $\frac{df'_y(x,y)}{du}$ för sig först. T ex $\frac{df'_x(x,y)}{du} = f''_{xx} \cdot x'_u + f''_{xy} \cdot y'_u$.

RÅD: Gör inte ”mellanleden” i huvudet utan skriv ner dem. Skriver du dessutom tydligt och är systematisk (whatever that means) har du en god chans att det också blir rätt.

FUNKTIONER FRÅN R^m TILL R^n. Låt (u,v) vara en punkt på GOLVET i vårt klassrum och (x,y,z) en punkt i RYMDEN i klassrummet bredvid och antag att punkterna är ”relaterade” genom:

x=2u-3v

y=3u+2v

z=4uv+1

Detta är ett exempel på en funktion från R^2 (vårt golv) till R^3 (rymden i klassrummet bredvid). Låt oss nu prata partiella förstaderivator! Det finns SEX sådana här och vi sammanfattar dem i en matris där första kolumnen fås genom att i tur och ordning derivera sambanden ovan med avseende på u och andra kolumnen fås på samma sätt fast nu ska man derivera med avseende på v istället.

Denna 3x2 matris kallas för JACOBIANEN (eller Jacobimatrisen) för funktionen ovan och den spelar i sammanhanget ungefär samma roll på KTH som derivata gör i skolkursen. (Viktig att kunna alltså!)

Beteckningen $g \circ f$ känner du kanske till, men för säkerhets skull tar vi ett exempel: Om $g(x) = x^2 + x^3 + 5$ och $f(x) = x^4$ så blir $g \circ f(x) = x^8 + x^{12} + 5$. Hur kommer kedjeregeln$Dg(f(x)) = g(f(x)) \cdot f'(x)$ att se ut när vi har att göra med funktioner från R^m till R^n? Svaret är att nu sköts det hela istället med en matrismultiplikation. Säg att vi har funktionen ovan som vi kallar för $\bar{f}$ (observera strecket över f!) och att funktionen $\bar{g}(x,y,z) = (xy, yz, xz)$ är en annan funktion denna gång från R^3 till R^3. Jacobianen för $g \circ f$ får man genom att multiplicera jacobianen för g med jacobianen för f, dvs genom att multiplicera en 3x3 matris med en 3x2 matris.

Ibland behöver man bara en delmatris av jacobianen. Beteckningen $\frac{d\bar{f}}{du}$ betyder t ex den första kolumnen i jacobianen för f och $\frac{d\bar{f}}{d(u,v)}$ betyder de två första kolonnerna i jacobianen för f dvs just här blir detta en annan beteckning för jacobianen för f.

Den uppmärksamme läsaren märker att vi nu (i princip) löst tal 10 på dagens 22/2. Läsaren uppmanas att fylla i det som saknas och också att lägga märke till hur f och g definierats i talet. Detta är det vanliga sättet att definiera funktioner från R^m till R^n, men det kan vara svårt att genomskåda om man inte känner till bakgrunden.

IMPLICIT GIVNA FUNKTIONER. Antag att F(x,y)=0 gäller och vi skulle vilja veta om detta definierar en funktion y=y(x) dvs om det går att ”lösa ut” y som en funktion av x. Ibland är detta självklart t ex F(x,y)= x-y-2 betyder att vi har x-y-2=0 och lätt kan lösa ut y=x-2, men hur gör vi om vi t ex har $1 - \cos y + x \cdot e^y - x^3 = 0$? Här går det inte att lösa ut y, men vi kan ändå besvara frågan om detta definierar y som en funktion av x. Vi har nämligen följande viktiga:

SATS. Om $F(x_0, y_0) = 0$ och $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ så gäller att F(x,y)=0 definierar y som en funktion av x i en OMGIVNING av punkten (x_0, y_0). Vidare gäller $y(x_0) = y_0$.

Som exempel tar vi det olösbara sambandet nyss dvs vi har: $F(x, y) = 1 - \cos y + x \cdot e^y - x^3$. Vi får $F'_y = \sin y + xe^y$. Väljer vi nu $x_0 = 1$ och $y_0 = 0$ får vi $F'_y(1, 0) = 1 \neq 0$ och $F(1, 0) = 0$ vilket betyder att sambandet definierar en funktion y=y(x) i en omgivning av punkten (1,0) sådan att y(1)=0.

OBS att satsen INTE säger något om hur stor eller liten omgivningen är utan bara att den FINNS. Det kan alltså mycket väl vara så att om man befinner sig "alltför långt" från punkten (1,0) så gäller det inte längre att $1 - \cos y + x \cdot e^y - x^3 = 0$ definierar en funktion y=y(x). (Satsen har som man säger "LOKAL karaktär".)

Med hjälp av s k implicit derivering kan man även komma åt derivatan av y=y(x). Man deriverar därvid SAMBANDET F(x,y)=0 på BÄGGE sidor med avseende på x. (Förväxla inte detta med en derivation av FUNKTIONEN F med avseende på x.) Vi får $F_x \cdot 1 + F_y \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}0$ varur $y'(x) = \frac{-F'_x}{F'_y}$. Använt på det sista ("olösbara") exemplet ger detta: $y'(x) = \frac{-e^y + 3x^2}{\sin y + x \cdot e^y}$. Om vi t ex sätter in x=1 så blir y=0 (enligt ovan) och vi får $y'(1) = 2$.

Samma sats (i princip) används också i andra mer generella sammanhang. I tal 12 (Dagens 23/2) har man t ex $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + x^2z - yz - z - 2$. För att visa det som står i talet räcker det att visa att F(1,1,1)=0 och $F'_z(1, 1, 1) \neq 0$ gäller. För att sedan ta reda på t ex z'_x deriverar vi sambandet F(x,y,z)=0 på båda sidor med avseende på x. Detta ger: $3x^2 + 3z^2 \cdot z'_x + 2xz + x^2z'_x - yz'_x - z'_x = 0$. Eftersom vi bara var intresserade av $z'(x, y)$ för x=1,y=1 och dessutom vet att z=z(1,1)=1 kan vi nu sätta in dessa värden och lösa ut z'.

Ett annat mer komplicerat exempel på en generalisering av satsen finns i tal 16 (Dagens 24/2). Om vi där skriver om ekvationssystemet som $\bar{F}(x, y, z) = (xy^2 + yz^2 + zx^2 - 4, x^3 + y^3 + z^3 - 9)$ har vi en funktion från R^3 till R^2. Vi har $\bar{F}(0, 1, 2) = (0, 0)$ (som motsvarar $F(x_0, y_0) = 0$ i den ursprungliga satsen) och determinanten för $\frac{d\bar{F}}{d(y,z)}$ i punkten (0,1,2) =36 $\neq 0$ (som motsvarar $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ i den ursprungliga satsen.)

Tal 15 (Dagens 24/2) är lärorikt. Där finns en funktion $\bar{f}$ från R^2 till R^2. För att visa att den är lokalt INVERTERBAR räcker det att visa att dess partialderivator (av första ordningen) är kontinuerliga och att determinanten för jacobianen är $\neq 0$. Man ser direkt att det första villkoret är uppfyllt. Vidare blir determinanten $= 2 - \cos x \cdot \cos y$ vilket är $\neq 0$ eftersom cosinus-funktioner är ≤ 1. Därmed är den LOKALA inverterbarheten visad. (OBS. Eftersom jacobianens determinant är $\neq 0$ i hela x-y planet dvs i hela definitionsområdet för $\bar{f}$, skulle man kunna förledas att tro att detta betyder att $\bar{f}$ är inverterbar I SIN HELHET. Någon sådan slutsats kan dock inte dras.)

Ett viktigt problem återstår. Jacobianen är given som en funktion av x och y och den punkt vi ska "sätta in" är u=0,v=1. Betyder detta att vi måste lösa ekvationssystemet $2x + \sin y = 0$, $\sin x + y + 1 = 1$? Detta är dock inte nödvändigt som tur är. Vi ser nämligen direkt att x=0, y=0 $\Rightarrow$ u=0, v=1 och på grund av den lokala inverterbarheten gäller denna implikation också omvänt dvs u=0, v=1 $\Rightarrow$ x=0, y=0.

För att få inversens jacobian inverterar man jacobianen för funktionen. (För att enkelt invertera en 2x2 matris låter man elementen på huvuddiagonalen byta plats och byter sedan tecken på de två andra elementen. Därefter delar man alla elementen med den ursprungliga matrisens determinant. Jfr "hjälplapp 3".)