7. För att klara att Taylorutveckla funktioner av flera variabler räcker det faktiskt ibland med att bara kunna MAC-LAURIN utveckla funktioner av EN variabel dvs kunna formeln: $f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} x^j$ (*)

Och om vi (som i tal 1 och 2) bara behöver Taylorpolynom av andra graden räcker det med: $f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + f''(0)\frac{x^2}{2} + O(x^3)$

Vi illustrerar tekniken genom att räkna tal 1a. Genom derivering och insättning av noll i funktionerna och deras derivator får vi: ln(1+x)=$x - x^2/2 + O(x^3)$ och $e^x = 1 + x + x^2/2 + O(x^3)$ Eftersom vi ska utveckla f(x,y) kring punkten (3,1) sätter vi x=3+h och y=1+v.

Vi har f(x,y)= f(3+h,1+v)= 2 ln (3+h-2-2v)+$e^{2(3+h)-6(1+v)}$= 2 ln(1+h-2v)+e^{2h-6v}= (enligt de ML-utvecklingar som vi nyss härledde)= $2(h-2v)-(h-2v)^2+O(r^3)+1+2h-6v+(2h-6v)^2/2+O(r^3)$. Det r som står i $O(r^3)$ motiveras av att vi nu hanterar funktioner av flera variabler. (Eftersom det rör sig om två variabler har vi $r = \sqrt{h^2+v^2}$).

När vi nu förenklar uttrycket behöver vi bara ta med termer av andra graden och kan "sortera in" allt av högre grad i $O(r^3)$ Vi får: $f(3+h, 1+v) = 1 + 4h - 10v + h^2 + 14v^2 - 8hv + O(r^3)$ "Återställer" vi vår substitution dvs sätter h=x-3, v=y-1 och utelämnar $O(r^3)$ får vi det sökta. (OBS. I tal 3 fungerar dock inte metoden ovan utan där måste man använda ett explicit uttryck för Taylorutvecklingen. Se sats 7.1 sid 141 i kursboken.)

TERMINOLOGI: Med en OMGIVNING till en punkt menas ett "klot" med centrum i punkten och radie > 0. (Om punkten själv inte skulle tillhöra sin omgivning kallas omgivningen för PUNKTERAD.) Om funktionen f har ett LOKALT maximum i en punkt P betyder detta att det finns en omgivning till punkten där f(P) är "ensam om att vara störst". (OBS. att omgivningen antas ligga HELT inom definitionsområdet för f.) Om det oavsett hur liten omgivningen kring P än är, alltid finns en punkt $P_1 \neq P$ där, sådan att $f(P_1) = f(P)$ talar man istället om ett OSTRÄNGT (lokalt) maximum. Med LOKAL EXTREMPUNKT menas en punkt där f antingen har ett lokalt maximum eller ett lokalt minimum. OBS att en s k sadelpunkt INTE räknas som lokal extrempunkt. (Termen "sadelpunkt" är ganska beskrivande, tänk på hur en sadel ser ut.)

Antag att vi har $f = f(x_1, x_2, \cdots x_n)$ dvs en funktion av n variabler. Vi är intresserade av funktionens lokala extrempunkter och deras karaktär (jfr. tal 5). Vi löser då först ekvationssystemet grad f = nollvektorn. De punkter vi då får fram kallas för de KRITISKA punkterna. För att bestämma deras karaktär bildar vi en nxn matris (H) där elementet i rad k och och kolonn j dvs $H_{k,j}$ är $= \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}$. Om vi antar att de blandade derivatorna är kontinuerliga blir H symmetrisk. För att undersöka karaktären hos en kritisk punkt sätter vi in dess koordinater i H. Sedan bestämmer vi de s k huvuddiagonaldeterminanterna: För n=3 är de: $d_1 = H_{1,1}$, $d_2 = H_{1,1} \cdot H_{2,2} - H_{1,2} \cdot H_{2,1}$ och $d_3 =$ det H. Om alla d_i:na är > 0 så har funktionen f ett lokalt minimum i den kritiska punkten. Om $d_1 < 0$ och de följande d_i:na har växlande tecken (dvs $d_2 > 0$, $d_3 < 0$, $d_4 > 0$ etc) så har f ett lokalt maximum i den kritiska punkten. Om inget av ovanstående gäller men det H $\neq 0$, så handlar det om en sadelpunkt. Om det H $= 0$ innehåller matrisen inte tillräckligt med information varför vi måste forsätta utredningen på något annat sätt.

Det kommer nog att bli sällan som du råkar ut för n>3 i ovanstående scenario, men det hela blir faktiskt lättare att minnas om man vet hur det ser ut generellt. För att inte bli för generella (och abstrakta) tar vi dock två exempel:

n=1. Det rör sig nu om funktioner y=f(x) från skolkursen. De kritiska punkterna fås från ekvationen $y' = 0$ och matrisen H ovan får dimensionen 1 x 1 och har y'' som sitt enda element. Som du kanske minns betydde $y'' > 0$ att f hade ett lokalt minimum i den kritiska punkten medan $y'' < 0$ betydde att f istället hade ett lokalt maximum. (Stämmer!)

n=2. Dvs f=f(x,y). Vi får de kritiska punkterna från ekvationssystemet $f'_x = 0, f'_y = 0$ och sätter vi in koordinaterna för en kritisk punkt i A=f_{xx}, B=$f_{xy} = f_{yx}$ och C=f_{yy} följer från den generella teorin att $A > 0$ och $AC - B^2 > 0$ betyder lokalt minimum medan $A < 0$ och $AC - B^2 > 0$ innebär lokalt maximum. Också från den generella teorin får vi att f har en sadelpunkt i den kritiska punkten om $AC - B^2 < 0$ samt att om $AC - B^2 = 0$ så krävs det en vidare utredning.

Ett område kallas för BEGRÄNSAT om det helt kan inrymmas i ett "klot" med ändlig radie och centrum i origo. Ett område som innehåller sina randpunkter kallas för SLUTET. Ett område som är både slutet och begränsat kallas för KOMPAKT. En viktig sats är att en kontinuerlig funktion som är definierad på ett kompakt område antar sitt största och minsta värde och alla värden mellan dem. (Uppfattar man "kontinuerlig" som synonymt med "sammanhängande" framstår satsen som närmast trivial.)

TAL 11. Vi ska bestämma största och minsta värdet som $f(x, y) = 2x^2 + y^2 - 2y$ kan anta i området $x^2 + y^2 = 4$. Området (som är periferin på en cirkel med radien 2) är kompakt. Dessutom är f(x,y) kontinuerlig i hela x-y-planet och speciellt då på cirkelperiferin. Satsen ovan kan alltså användas. Man kan också formulera det hela som att största och minsta värdet av f(x,y) ska bestämmas under BIVILLKORET $x^2 + y^2 = 4$.

En metod är att lösa ut y (eller x) ur bivillkoret och göra om problemet till att undersöka en funktion av EN variabel med avseende på största och minsta värde. Detta är kanske möjligt här, men det skulle vara ganska opraktiskt. Istället använder man Lagranges metod. Bilda $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \cdot g(x, y)$ där $g(x, y) = x^2 + y^2 - 4$. De punkter vi söker är antingen lösningar till ekvationssystemet: $F'_x = 0$, $F'_y = 0$, $F'_\lambda = 0$ eller till ekvationssystemet: $g'_x = 0$, $g'_y = 0$, $g(x, y) = 0$. Man ser lätt att det sista ekvationsystemet saknar lösningar. I det första får vi från $F'_x = 0$ att $2x = -\lambda x$ gäller dvs vi har antingen x=0 eller $\lambda = -2$. x=0 insatt i $F'_\lambda = 0$ ger $y = \pm 2$ och $\lambda = -2$ insatt i $F'_y = 0$ ger $y = -1$ som i sin tur insatt i $F'_\lambda = 0$ ger $x = \pm\sqrt{3}$ Vi har alltså fyra intressanta punkter $(0, \pm 2)$ och $(\pm\sqrt{3}, -1)$. Genom att sätta in punkterna i f(x,y) och jämföra får vi svaret.

TAL 13 är ett LÄRORIKT tal. Först bestämmer man lösningarna till $f'_x = 0$, $f'_y = 0$ och ser om där finns några punkter som ligger i det inre av det givna området. Sedan använder man Lagrange på cirkelperiferin (dvs bivillkoret är $x^2 + y^2 = 9$) och ser om där finns några punkter som ligger på randen till det givna området. Därefter måste man också på samma sätt undersöka f(x,y) på linjen y=1. Detta sista är detsamma som att undersöka f(x,1) dvs här har vi bara en variabel. Slutligen bestämmer vi "hörnpunkterna" dvs de punkter som uppfyller både $x^2 + y^2 = 9$ och y=1. Jämförelse av f:s värden i de punkter vi fått fram ger sedan det sökta.

Om definitionsområdet inte är kompakt behöver funktionen inte anta vare sig sitt största eller sitt minsta värde. Se t ex tal 27a. För att göra en närmare undersökning i dylika fall inför man polära koordinater och ser vad som händer då r går mot oändligheten.

TAL 23. En Mac-Laurinutveckling av f(x,y) fås av sats 7.1 (sid 141 i kursboken) om man sätter h=x,k=y och (de ursprungliga) x och y båda =0. Man får $f(x, y) = \cdots + \binom{21}{4} \frac{\partial^{21} f(0,0)}{\partial^{17} x \partial^4 y} \cdot \frac{x^{17} y^4}{21!} + \cdots$. Men $f(x, y) = e^{xy} \cos 2x$ = (Enligt formeln (*) i början)= $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(xy)^j}{j!} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (2x)^{2m}}{(2m)!} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-4)^m \cdot x^{2m+j} \cdot y^j}{j!(2m)!}$. I detta sista uttryck är det koefficienten för $x^{17} y^4$ som intresserar oss. Från 2m+j=17 och j=4 får vi m=13/2 vilket betyder att den sökta koefficienten är =0 eftersom m måste vara ett heltal. På grund av Mac-Laurinutvecklingens entydighet får man $0 = \binom{21}{4} \frac{\partial^{21} f(0,0)}{\partial^{17} x \partial^4 y} \frac{1}{21!}$ varur $\frac{\partial^{21} f(0,0)}{\partial^{17} x \partial^4 y} = 0$. (ÖVNING: Visa att $\frac{\partial^{20} f(0,0)}{\partial^{18} x \partial^2 y} = 153 \cdot 2^{17}$.)