8.(Dagens 4/4-7/4)

MINSTA KVADRATMETODEN.

Ekvationssystemet i tal 1a går inte att lösa eftersom de fyra villkoren på x och y (dvs ekvationerna) motsäger varandra. Om man däremot nöjer sig med en lösning där de fyra villkoren inte motsäger varandra "alltför mycket" så finns en lösning. Vad man därvid menar med "en lösning" och vad som är "alltför mycket" skall snart framgå. Först skriver vi om ekvationsystemet i matrisform $A\bar{u} = \bar{c}$ (*)

Här är A en 4x2 matris vars rader är (1 1),(1 -2),(2 -1),(1 -1) och $\bar{u} = (x, y)^T$ och $\bar{c} = (2, 0, 11, 0)^T$. Med en lösning menar vi nu en s k minsta-kvadrat-lösning dvs ett $\bar{u}$ som gör $|A\bar{u} - \bar{c}|^2$ så liten som möjligt. Tillvägagångsättet för att få fram detta $\bar{u}$ är ganska enkelt (i alla fall att minnas!).

Vad vi ska göra är att multiplicera (*) ovan med A^T på båda sidor och lösa det ekvationssystem som därvid uppkommer. $A^T A$ får dimensionen 2x2 och vi hittar lätt dess invers B^{-1} säg. Slutligen återstår matrismultiplikationen $B^{-1}A^T\bar{c}$ som ger $\bar{u}$. Genomför gärna dessa räkningar och för att kontrollera att du är på rätt väg, titta på matrisernas dimensioner: B^{-1} är 2x2, A^T är 2x4 och $\bar{c}$ är 4x1. Resultatet ($\bar{u}$) blir 2x1. Stämmer! Du ska få $\bar{u} = (4, 1)^T$. Genom att beräkna $|A\bar{u} - \bar{c}|^2$ för $\bar{u} = (4, 1)^T$ och sedan dividera med antalet "observationer" (dvs med antalet villkor som ju var 4 stycken) får man kvadraten på det s k medelfelet. Medelfelet själv (här $=\sqrt{38/4} \approx 3.1$) är ett mått på hur "bra" lösningen är.

I tal 1b gör man precis likadant, men det uppstår en komplikation eftersom $A^T A$ har determinanten noll vilket betyder att minsta-kvadrat-lösningen inte blir entydig.

En annan variant är när man vill hitta en funktion f(x) som "anpassar sig så bra som möjligt" till ett antal punkter i x-y planet. Som funktion väljer man då vanligen ett polynom dvs $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ där man med samma teknik som nyss kan bestämma $a_n \cdots a_0$. Man kan visa att om polynomets gradtal är mindre än antalet punkter så blir lösningen entydig. Som exempel tittar vi på tal 2. Först gör vi om det givna till $A\bar{u} = \bar{c}$ genom att sätta in punkterna i linjens ekvation. Sätter vi in (-1,0) ger detta 0 = -a + b och sätter vi in (0,1) får vi $1 = 0 \cdot a + b$ etc. Raderna i A blir: (-1 1),(0 1),(1 1),(2 1). Vidare har vi $\bar{u} = (a, b)^T$ och $\bar{c} = (0, 1, 1, 2)^T$. Sedan är det bara att fortsätta som i tal 1a. (Not. Ett annat namn på medelfelet är kvadratiska medelfelet.)

DUBBELINTEGRALER. Vi inleder med en repetition av enkelintegraler. De viktigaste hjälpmedlen är substitution och partialintegrering. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\sqrt{\cos x}dx$ ser t ex svår ut men om man sätter $t = \cos x$ så blir $dt = -\sin x dx$ och eftersom $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ blir integralen $= -\int_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}} t^{-1/2}dt$ som man lätt löser. OBS. Glöm inte att byta gränser när du gör en substitution!

Om man minns hur man deriverar en produkt är det lätt att ta fram formeln för partialintegration. Om man integrerar $(uv)' = u'v + v'u$ får man nämligen $uv = \int u'v + \int v'u$ vilket ger $\int v'u = uv - \int u'v$. För att inte göra fel vid partialintegrering rekommenderas följande uppställning. (Vi har valt att illustrera med $\ln x$ som vi skriver som produkten $1 \cdot \ln x$.)

$$
\begin{array}{ccc}
\displaystyle\int & 1\cdot & \ln x \\
 & v' & u \\
 & v = x & u' = 1/x
\end{array}
$$

För att beräkna en dubbelintegral med givna gränser gör man två enkelintegreringar. Principiellt ser det ut sähär: $\int_{x=a}^{b}(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy)dx$. När man utför den integrering (med avseende på y) som står inom parantesen betraktar man x som en konstant. När man sedan sätter in gränserna (h(x) och g(x)) övergår det som står inom parantesen till en funktion bara av x. Denna integreras sedan på vanligt sätt med avsende på x. (För tydlighets skull har vi skrivit x=a istället för bara a i den undre gränsen.)

Om dubbelintegralens gränser inte är angivna från början utan man istället bara vet vilket område man ska integrera över, så får man själv ta reda på hur gränserna ska se ut. Det finns i princip två sätt att beskriva ett område.

1. Om området begränsas av räta linjer kan linjernas skärningspunkter vara angivna.

Säg t ex att området är en triangel ABC med A=(0,1),B=(1,3) och C=(1,0). Vi behöver då dels ekvationen för linjen genom A och B dels ekvationen för linjen genom B och C. Riktningskoefficienten för ℓ_{AB} på två sätt ger: $\frac{y-1}{x-0} = \frac{3-1}{1-0}$ varur ℓ_{AB}:y=2x+1 På samma sätt får man ℓ_{AC}:y=1-x

När vi nu ska bestämma gränserna i dubbelintegralen börjar vi med x som går från 0 till 1. Därvid går ju y för varje x från ℓ_{AC} till ℓ_{AB} dvs från 1-x till 2x+1. Vi får alltså: $\int_{x=0}^{1}(\int_{y=1-x}^{2x+1} f(x,y)dy)dx$.

2. Om området beskrivs genom olikheter blir tekniken lite annorlunda.

Säg att området beskrivs av $y \leq 4$ och $y > x^2$ (Mindre än eller mindre än eller lika med är sak samma i dessa sammanhang.) Linjen y=4 delar x-y planet i två områden. På ena sidan linjen är $y > 4$ och på andra sidan linjen är $y < 4$. På samma sätt delas x-y planet av kurvan $y = x^2$ i två områden, i det ena är $y > x^2$ och i det andra är $y < x^2$. För att veta vilket område som är vilket sätter man in en punkt i $y = x^2$. Det område som beskrivs av de givna olikheterna ser ut som ett vinglas i genomskärning (utan fot). För att kunna ange gränserna i dubbelintegralen måste vi bestämma x-koordinaterna för skärningspunkterna mellan linjen y=4 och kurvan $y = x^2$ dvs lösa motsvarande ekvationssystem. Vi får $x = \pm 2$ och kan nu skriva: $\int_{x=-2}^{2}(\int_{y=x^2}^{4} f(x,y)dy)dx$.

KOMPLIKATIONER.

1. I tal 9c går den första integrationen inte att utföra eftersom e^{-x^2} inte går att integrera. Genom att titta på gränserna ser man dock att området är en triangel med hörn i (0,0),(0,1) och (1,1). Detta område kan vi beskriva genom att låta x gå från 0 till 1 och (för varje x) låta y gå från 0 till x. Eftersom det inte spelar någon roll i vilken ordning man gör integrationen kan den sökta integralen skrivas:$\int_{x=0}^{1}(\int_{y=0}^{x} e^{-x^2}dy)dx$. Integralen inom parantesen blir nu $e^{-x^2}x$ vilket man lätt integrerar med avseende på x. (Derivera e^{-x^2} så ser du detta.)

2. Om $\iint_T f(x,y)dxdy$ söks där T t ex är en triangel med hörn i (0,0),(2,3) och (5,0) måste man dela upp dubbelintegralen i en summa av två: $\iint_T f(x,y)dxdy = \iint_{T_1} f(x,y)dxdy + \iint_{T_2} f(x,y)dxdy$ Här är T_1 en triangel med hörn i (0,0),(2,3) och (2,0) och T_2 resten av T.

3. Också i tal 6d måste integralen delas upp: $\int_{x=-2}^{-1}\int_{y=0}^{x^2-1} + \int_{x=-1}^{1}\int_{y=x^2-1}^{0} + \int_{x=1}^{2}\int_{y=0}^{x^2-1}$

Om man nämligen försöker beräkna den direkt som $\int_{x=-2}^{2}\int_{y=0}^{x^2-1}$ svarar detta mot att den mellersta termen i uppdelningen ovan får fel tecken. (Integrationen ska nämligen alltid ske i koordinataxlarnas riktning.)