Hjälplapp 9. (Dagens 11/4-14/4)

Det handlar fortfarande om dubbelintegraler men dels är dom lite knepigare, dels tillkommer variabelsubstitution och generaliserade integraler.

Det är viktigt att man ritar upp integrationsområdet rätt. Grundprincipen är att funktionen $y = f(x)$ delar x-y planet i två delar där $y > f(x)$ i den ena delen och $y < f(x)$ i den andra. Om $f(x)$ är t ex ett andragradspolynom som i tal 4b behövs egentligen tidigare kunskaper för att se vad för slags kurva det är. Ofta räcker det dock med kvadratkomplettering. Eftersom tal 4b även innehåller andra svårigheter behandlar vi det sist.

Med hjälp av variablerna och gränserna kan området nu "beskrivas". Det finns två sätt beroende på i vilken ordning man vill utföra integrationen. I tal 1c har man tex att välja på $\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{\sqrt{x}}$ och $\int_{y=0}^{1}\int_{x=y^2}^{1}$. Det är inte alltid det spelar roll vilket sätt man väljer, men här är det avgörande. (Läsaren rekommenderas lösa detta tal.)

Vissa integraler kan bara lösas om man först gör en substitution. Härvid kommer både integrationsområdet och "integrationselementet" (dxdy) att ändras. Hur området ändras brukar inte vara så svårt att inse, men ändringen av dxdy kräver att man friskar upp sina kunskaper om Jacobianen (Jacobimatrisen).

Vi "saxar" från hjälplapp 6:

x=2u-3v

y=3u+2v

z=4uv+1

Detta är ett exempel på en funktion från R^2 (vårt golv) till R^3 (rymden i klassrummet bredvid). Låt oss se på de partiella förstaderivatorna. Det finns SEX sådana här och vi sammanfattar dem i en matris där första kolumnen fås genom att i tur och ordning derivera sambanden ovan med avseende på u och andra kolumnen fås på samma sätt fast nu ska man derivera med avseende på v istället.

Denna 3x2 matris kallas för JACOBIANEN (eller Jacobimatrisen) för funktionen ovan och den betecknas (här) $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v)}$. (Jag föredrar beteckningen ∂ istället för d eftersom det då framgår klarare vad man ska göra.)

När vi substituerar i en dubbelintegral handlar det om funktioner från R^2 till R^2 dvs Jacobianen blir en 2x2 matris. Säg att vi väljer att införa polära koordinater i $\iint f(x,y)dxdy$ dvs vi sätter $x = r\cos\theta$ och $y = r\sin\theta$. Vi får då $dxdy = ||\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}||drd\theta$. Det första absolutbeloppstecknet betecknar determinant medan det andra är ett vanligt absolutbeloppstecken. Genomförs beräkningarna får man: $dxdy = r \cdot drd\theta$. Eftersom $r \geq 0$ hade det andra absolutbeloppstecknet ingen funktion här, men i nästa exempel är det betydelsefullt.

I tal 4a gör vi substitutionen u=x+y, v=x-y. Vi får $= ||\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}|| = |-2| = 2$ men det vi vill ha är $||\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}||$.

Enklast är att utnyttja $||\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}|| \cdot ||\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}|| = 1$. (Detta sista följer av att man får inversens jacobian genom att invertera jacobianen för funktionen vilket betyder att produkten av motsvarande determinanter är =1.)

För att få reda på de nya gränserna i tal 4a måste vi ta reda på ekvationerna för de linjer som begränsar kvadraten. Ekvationerna för begränsningslinjerna kan skrivas: x+y=2, x+y=0, x-y=-2, x-y=0 vilket betyder att integralen efter substitutionen blir:

$\int_{u=0}^{2}\int_{v=-2}^{0} ve^u\frac{1}{2}dudv$. (Vi har ju tidigare sagt att man ska integrera i axlarnas riktning. Detta gäller förstås även efter en substitution dvs den undre gränsen i integrationen är alltid det mindre värdet.)

Räkna gärna tal 4d som övning. Substitutionen är densamma som i tal 4a, men området är i 4d givet på ett sådant sätt att både ekvationerna och de nya gränserna direkt kan avläsas vilket förenklar.

I tal 3c är vi tvungna att göra två substitutioner. Först u=2x, v=3y dvs x=u/2, y=v/3. Ellipsen övergår härvid i cirkeln $u^2 + v^2 = 1$. Sedan inför vi polära koordinater dvs $u = r\cos\theta$ och $v = r\sin\theta$. Relationen mellan $dxdy$ och $drd\theta$ fås nu som en produkt:$dxdy = ||\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}|| \cdot ||\frac{\partial(u,v)}{\partial(r,\theta)}||drd\theta = \frac{r}{6}drd\theta$. Not. Det går förstås att slå ihop substitutionerna till $x = \frac{r}{2}\cos\theta$ och $y = \frac{r}{3}\sin\theta$.

Efter substitution med hjälp av polära koordinater får man vanligen integraler med trigonometriska integrander. Vi påminner om följande knep: $\int \sin v \cos v dv = \int \frac{\sin 2v}{2}dv$. Man bör också kunna $\cos 2v = \cos^2 v - \sin^2 v =$ (trigonometriska ettan) $= 2\cos^2 v - 1 = 1 - 2\sin^2 v$. Från detta får man t ex $\int \cos^2 vdv = \int \frac{\cos 2v+1}{2}dv$. Svår verkar $\int sin^3 vdv$, men med hjälp av trig.ettan blir den $= \int(1 - \cos^2 v)\sin vdv$ som lätt löses genom substitutionen $t = \cos v$.

När vi ändå är inne på "integrationstrick" så verkar inte många veta vad man ska göra med $\frac{x^3}{1+x^2}$ resp. $\frac{x^2}{1+x^2}$. När man har en kvot mellan polynom och täljarens gradtal är större än ELLER LIKA med nämnarens gradtal så ska man DIVIDERA täljaren med nämnaren. En sådan polynomdivision (med rest!) ger här: $x - \frac{x}{1+x^2}$ resp. $1 - \frac{1}{1+x^2}$ och nu är det lätt att integrera. ($D(\ln(1 + x^2)) = \frac{2x}{1+x^2}$ resp. $D(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}$ gäller ju.) När täljarens gradtal är mindre än nämnarens blir man annars ofta tvungen att partialintegrera. (Gå till "strövtåget" i Amelia 1 som finns på min hemsida om du glömt detta.)

GENERALISERADE DUBBBELINTEGRALER.

Vi ska beräkna $\iint_D f(x,y)dxdy$ där integrationsområdet D är oändligt och/ eller integranden blir oändlig för minst ett värde i D. Precis som vid enkelintegraler måste man då skriva om integralen som ett gränsvärde, därefter beräkna integralen på vanligt sätt och slutligen "gå i limes". Gränsövergången blir dock lite annorlunda eftersom det finns två variabler och man alltså (vanligen) kan gå i limes på flera olika sätt. Ett tillräckligt villkor för att man ska få samma värde på integralen oavsett vilken limesövergång man väljer är att integranden är positiv.

Tal 5b illustrerar detta. Vi beräknar först integralen över området $0 \leq x \leq A, 0 \leq y \leq A$ och låter sedan A gå mot ∞. Det hade inte spelat någon roll om vi istället valt området $0 \leq x \leq A^2, 0 \leq y \leq A$. Visserligen går man här snabbare mot ∞ i x-led än i y-led, men integralens värde blir detsamma.

I tal 5d blir integranden oändlig när x och/eller y är =0. Vi beräknar därför först
$\int_{x=a}^{1}\int_{y=a}^{1}\frac{1}{\sqrt{xy}}dxdy$ och låter sedan a gå mot 0+. (Inte heller här spelar det någon roll om man går mot noll i x-led och y-led "olika fort" eller inte.)

När värdet på integralen är ∞, dvs då gränsvärdet är oegentligt säger man att integralen DIVERGERAR. (Jfr tal 5c.)

TAL 4b: Om vi kvadratkompletterar ser vi att området är högra halvan av en cirkel med radie =1/2 och centrum i (0,1/2). För att beskriva detta område med hjälp av polära koordinater behöver vi känna till att periferivinkeln på en halvcirkelbåge är rät, vilket är en sats från skolkursen. Efter införandet av polära koordinater blir integralen $= \int_{v=0}^{\pi/2}\int_{r=0}^{\sin v} r^2 drdv$. (Resten av lösningen överlåtes åt läsaren.)