”HJÄLPLAPP.”

Vektorerna $\bar{v}_1, \bar{v}_2 \cdots \bar{v}_n$ säges vara linjärt oberoende om $\lambda_1\bar{v}_1+\lambda_2\bar{v}_2+\cdots+\lambda_n\bar{v}_n = \bar{0}$ bara är uppfyllt när $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$. Ser man definitionen ovan som ett ekvationssystem i λ_1 , $\lambda_2 \cdots \lambda_n$ har dettas koefficientmatris vektorerna (i koordinatform) som kolumner. Om matrisen är kvadratisk (dvs nxn) så är villkoret för att detta (homogena) system bara ska ha (den triviala) lösningen alla λ =0 att determinanten för koefficientmatrisen är $\neq$ 0 vilket alltså i detta fall är ett annat (nödvändigt och tillräckligt) villkor för att linjärt oberoende mellan vektorerna ska gälla. (Villkoret kan användas i tal 10 d,e.)

Om vi förutsätter s k standardbas (se nedan) så är i tre dimensioner absolutbeloppet av determinanten ovan = volymen av den parallellepiped som spänns upp av vektorerna $\bar{v}_1$,$\bar{v}_2$ och $\bar{v}_3$.

Om volymen är = 0, så betyder detta att de tre vektorerna ligger i samma plan dvs en av vektorerna kan skrivas som en linjär kombination av de bägge andra vilket i sin tur betyder att vektorerna är linjärt beroende. Det finns alltså flera sätt att se dessa saker och ju fler desto bättre!

Till tal 11: För att duga som bas måste basvektorerna vara linjärt oberoende och lika många som rummets dimension. Till tal 10f: Finns det t ex 4 vektorer i R^3 är de automatiskt linjärt beroende (och duger alltså inte som bas.)

Om [T] är matrisen för en linjär avbildning så är kolumnerna i [T] (sedda som vektorer i koordinatform) bilderna av de basvektorer som ”spänner upp” föremålsrummet. Om inget annat anges antar man att man har ”standardbasen” dvs den där basvektorerna har längden ett och är vinkelräta. (T ex i R^3 har basvektorerna koordinaterna:(1,0,0), (0,1,0) och (0,0,1).) I tipset i tal 2 framgår hur man får bilden av en vektor genom en matrismultiplikation (från vänster) med [T].

Matrisen för inversen till en linjär avbildning är $[T^{-1}]$. När avbildningen är från R^2 till R^2 är det (t ex i tal 8) bra att kunna följande: Låt A vara en 2x2 matris med raderna a b och c d. I så fall blir inversen $A^{-1} = \frac{1}{detA}$B där B är en matris med raderna d -b och -c a. (Den metod som ligger bakom detta samband fungerar även för större matriser, men blir då lite arbetsam.) Obs att det $A \neq 0$ är ett nödvändigt och tillräckligt villkor för att A^{-1} ska existera. OBS.Tipset i tal 13 bör nog vara $\bar{v} = T^{-1}(4,2) = aT^{-1}(7,3) + bT^{-1}(10,4)$ (Man utnyttjar alltså här att också T^{-1} är en linjär avbildning, samt att t ex T(1,1)=(7,3) medför (1,1)=T^{-1}(7,3).)

Från skolkursen är du kanske van vid att ekvationssystem alltid har lika många obekanta som ekvationer och alltid bara har EN lösning. I denhär kursen finns det många andra möjligheter. I tal 4d uppstår t ex ett ekvationssystem med oändligt många lösningar. Och i tal 3a blir det ett ekvationssystem med tre ekvationer och två obekanta som dock har en lösning! Ett problem kan vara hur man ska presentera lösningen när det finns oändligt många lösningar. Man använder sig då av PARAMETRAR dvs tal (t,s etc) som kan anta godtyckliga värden. Vi ger ett exempel av den typ av ekvationslösning som uppstår då man ska bestämma s k egenvektorer. (Detta kommer i nästa modul.)

Vi har då ett homogent ekvationssystemet med en koefficientmatris som har determinant = 0. Det finns då oändligt många lösningar så minst en av ekvationerna följer av de andra eller är trivialt sann.

$$\begin{aligned} x + 0y + 2z &= 0 \\ 2x - y + z &= 0 \\ -x + y + z &= 0 \end{aligned}$$

Vi sätter nu t ex z=t och får från den första ekvationen x= -2t. Sedan ger den tredje ekvationen att y= x -z = -2t -t = -3t medan den andra ekvationen automatiskt är uppfylld. Svaret blir (x,y,z) =t(-2,-3,1) där t är ett godtyckligt tal.

Även när ett ekvationssystem saknar lösningar finns det något man kan göra om man nöjer sig med en approximativ lösning. Detta är ämnet för nästa avsnitt.

MINSTA KVADRATMETODEN. Ekvationssystemet i tal 15a går inte att lösa eftersom de fyra villkoren på x och y (dvs ekvationerna) motsäger varandra. Om man däremot nöjer sig med en lösning där de fyra villkoren inte motsäger varandra ”alltför mycket” så finns en lösning. Vad man därvid menar med ”en lösning” och vad som är ”alltför mycket” skall snart framgå. Först skriver vi om ekvationssystemet i matrisform $A\bar{u} = \bar{c}$ (*)

Här är A en 4x2 matris vars rader är (1 1),(1 -2),(2 -1),(1 -1) och $\bar{u} = (x, y)^T$ och $\bar{c} = (2, 0, 11, 0)^T$. Med en lösning menar vi nu en s k minsta-kvadrat-lösning dvs ett $\bar{u}$ som gör $|A\bar{u} - \bar{c}|^2$ så liten som möjligt. Tillvägagångsättet för att få fram detta $\bar{u}$ är ganska enkelt (i alla fall att minnas!).

Vad vi ska göra är att multiplicera (*) ovan med A^T på båda sidor och lösa det ekvationssystem som därvid uppkommer. A^TA får dimensionen 2x2 och vi hittar lätt dess invers B^{-1} säg. Slutligen återstår matrismultiplikationen $B^{-1}A^T\bar{c}$ som ger $\bar{u}$. Genomför gärna dessa räkningar och för att kontrollera att du är på rätt väg, titta på matrisernas dimensioner: B^{-1} är 2x2, A^T är 2x4 och $\bar{c}$ är 4x1. Resultatet ($\bar{u}$) blir 2x1. Stämmer! Du ska få $\bar{u} = (4, 1)^T$ dvs x=4 och y=1 är den sökta lösningen. Genom att beräkna $|A\bar{u} - \bar{c}|^2$ för $\bar{u} = (4, 1)^T$ och sedan dividera med antalet ”observationer” (dvs med antalet villkor som ju var 4 stycken) får man kvadraten på det s k medelfelet. Medelfelet själv (här $=\sqrt{38/4} \approx 3.1$) är ett mått på hur ”bra” lösningen är.

I tal 15b gör man precis likadant, men det uppstår en komplikation eftersom A^TA har determinanten noll vilket betyder att minsta-kvadrat-lösningen inte blir entydig.

En annan variant är när man vill hitta en funktion f(x) som ”anpassar sig så bra som möjligt” till ett antal punkter i x-y planet. Som funktion väljer man då vanligen ett polynom dvs $f(x) = a_nx^n + \cdots + a_0$ där man med samma teknik som nyss kan bestämma $a_n \cdots a_0$. Man kan visa att om polynomets gradtal är mindre än antalet punkter så blir lösningen entydig. Som exempel tittar vi på tal 16. Först gör vi om det givna till $A\bar{u} = \bar{c}$ genom att sätta in punkterna i linjens ekvation. Sätter vi in (-1,0) ger detta 0 = -a + b och sätter vi in (0,1) får vi $1 = 0 \cdot a + b$ etc. Raderna i A blir: (-1 1),(0 1),(1 1),(2 1). Vidare har vi $\bar{u} = (a, b)^T$ och $\bar{c} = (0, 1, 1, 2)^T$. Sedan är det bara att fortsätta som i tal 15a. (Medelfelet blir $\sqrt{5}/10$.)

RÅD: Gå till www.math.kth.se/∼goranr/mattesida.htm och ladda ner den första hjälplappen tillsammans med motsvarande tal (”Dagens uppgifter”.) Detta kan hjälpa dig i modul 5!