BASBYTEN.

Index-beteckningarna if, fie etc är mina egna. De gör det lite lättare att hålla ordning på det hela. Vektorer betecknas med ett streck över. Om en koordinat avses skrivs detta vågrätt t ex (2,1) men avses en vektor används transponat t ex $(2,1)^T$. $\bar{0}$ betecknar nollvektorn.

Vi illustrerar basbyte med ett enkelt exempel: Sambandet mellan baserna $\bar{f}_1, \bar{f}_2$ och $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ är $\bar{f}_1 = \bar{e}_1 + 3\bar{e}_2$ $//\bar{f}_2 = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2$. Vektorn $\bar{v}$ har koordinaterna (2,1) i f-basen. Vilka koordinater har den i e-basen? Med mina beteckningar har vi $\bar{v}_{if} = (2,1)^T$ och söker koordinaterna för $\bar{v}_{ie}$. Vi får $\bar{v}_{if} = 2 \cdot \bar{f}_1 + 1 \cdot \bar{f}_2 = 2 \cdot (\bar{e}_1 + 3\bar{e}_2) + 1 \cdot (\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2) = 3\bar{e}_1 + 8\bar{e}_2 = \bar{v}_{ie}$. Svaret är alltså (3,8).

Det är dock bättre att räkna med matriser. Koefficientmatrisen för sambandet mellan baserna ovan (där f uttrycks i e) är P_{fie} =(1 3//1 2).

Om vi inför $Q_{e\to f} = P_{fie}^T$ kan den (symboliska) räkning vi gjorde skrivas som en matrismultiplikation: $\bar{v}_{ie} = Q_{e\to f} \cdot \bar{v}_{if} = (3,8)^T$. Beteckningen $Q_{e\to f}$ kan tyckas ologisk men när vi uttrycker f i e byter vi ju ut den gamla basen e mot en ny bas f dvs vi går FRÅN e-bas TILL f-bas vilket är vad e$\to$f syftar på. Vet man $\bar{v}_{ie}$ och söker $\bar{v}_{if}$ använder man istället: $\bar{v}_{if} = Q_{f\to e} \cdot \bar{v}_{ie}$ där $Q_{f\to e}$ är inversen till $Q_{e\to f}$.

Q-matriserna ovan är s k transformationsmatriser. De är alltid kvadratiska med determinant $\neq 0$. Läsaren bör nu klara tal 1,2,3 och 6 fast för säkerhets skull ska vi se närmare på 2c och 6c.

I 2c har man $\bar{g}_1 = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2$ $//\bar{g}_2 = 2\bar{e}_1 + \bar{e}_2$ och $\bar{f}_1 = \bar{e}_1 + 5\bar{e}_2$ $//\bar{f}_2 = 3\bar{e}_1 + 3\bar{e}_2$. Man söker $Q_{g\to f}$. Men denna får man lätt av sambandet: $Q_{g\to f} = Q_{g\to e} Q_{e\to f}$

För att klara 6c inför vi (x,y) som koordinaterna för $\bar{v}$ i e-basen och (u,v) som koordinaterna för $\bar{v}$ i f-basen. Sambandet $\bar{v}_{ie} = Q_{e\to f} \cdot \bar{v}_{if}$ ovan ger då $(\text{x,y})^T = Q_{e\to f} \cdot (\text{u,v})^T$. Eftersom $Q_{e\to f}$ =(4 3//3 2) får vi x=4u+3v//y=3u+2v. Ekvationen x-y=2 övergår då i 4u+3v-(3u+2v)=2 dvs i u+v=2 som är svaret. Tal 4 och 5 är varianter på tal 6c.

En bas där basvektorerna har längden ett och är vinkelräta är ju den vanligaste typen av bas. En sådan bas kallas för en ortonormerad bas eller kortare ”ON-bas”. Matrisen Q för en övergång mellan två ON-baser har egenskapen att $Q^{-1} = Q^T$ eller uttryckt annorlunda $Q^T \cdot Q = \text{I}$ där I är enhetsmatrisen. Detta sista ger lätt lösningen till tal 7 . Missa bara inte att $(kQ)^T = k(Q^T)$ gäller.

Säg att A är matrisen för en linjär avbildning där föremålsrum och bildrum är samma rum (vilket är den vanligaste situationen). Kolumnerna i A (sedda som vektorer) är därvid bilderna av de basvektorer som ”spänner upp” rummet. Detta betyder att om vi byter till en ny bas så kommer A att ändras. Om $Q_{f\to e}$ är transformationsmatrisen för bytet från f-bas till e-bas och A_f resp. A_e är matrisens utseende i de olika baserna gäller: $A_e = Q_{f\to e}^{-1} A_f Q_{f\to e}$ vilket gör det lätt att lösa tal 8.

EGENVÄRDEN OCH EGENVEKTORER.

Antag att A$\bar{v} = \lambda\bar{v}$ gäller med $\bar{v} \neq$ nollvektorn dvs vektorn $\bar{v}$ är parallell med sin bild. I så fall är λ ett s k EGENVÄRDE och $\bar{v}$ är motsvarande EGENVEKTOR.

För att bestämma egenvärdena löser man ekvationen det (A-λI)=0 som med ett fint namn kallas för ”sekularekvationen”. (För nxn matriser blir sekularekvationen av n:te graden, så för n>2 kan man ibland behöva knepet att gissa en rot (x=a säg) för att sedan dela ekvationen med (x-a) och få ner dess gradtal.)

När man sedan ska bestämma egenvektorer sker detta genom att man löser homogena ekvationssystem där koefficientmatrisernas determinanter är =0. Sådana system har oändligt många lösningar så minst en av ekvationerna följer av de andra eller är trivialt sann. När man ska ange de oändligt många lösningarna använder man sig av parametrar t,s etc.

Som exempel räknar vi 10 c. Sekularekvationen vållar inga svårigheter och vi får $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ och $\lambda_3 = 1$. Vi bestämmer den (eller snarare de) egenvektorer som hör till dubbelroten medan resten lämnas som övning åt läsaren. Ekvationssystemet (A-$\lambda I)\bar{v} = (0,0,0)^T$ blir med λ=0 och $\bar{v} = (x,y,z)^T$:

$$\begin{aligned} x + 0y + 2z &= 0 \\ 2x - y + z &= 0 \\ -x + y + z &= 0 \end{aligned}$$

Vi sätter nu t ex z=t och får från den första ekvationen x= -2t. Sedan ger den tredje ekvationen att y= x -z = -2t -t = -3t medan den andra ekvationen automatiskt är uppfylld. Svaret blir $\bar{v}^T = t(-2,-3,1)$ där t är ett godtyckligt tal $\neq 0$ eftersom nollvektorn inte är en egenvektor. (I svaren har parametern utelämnats, något som också görs då egenvektorerna används för att bilda en transformationsmatris. Se nedan.)

Om man lyckas hitta en bas av egenvektorer så kan man genom att transformera till den basen få matrisen A för en linjär avbildning att bli en diagonalmatris D med egenvärdena på huvuddiagonalen. Man har som man säger diagonaliserat A. Transformationsmatrisen C har egenvektorerna (utan parametrar) som kolumner och vi har $C^{-1}AC = D$.

Det är inte alltid det går att hitta en bas av egenvektorer. För att duga som bas måste ju basvektorerna vara linjärt oberoende och lika många som rummets dimension. Ett tillräckligt (men inte nödvändigt) villkor är att egenvärdena är reella och olika. Det är nämligen så att egenvektorer som hör till olika (reella) egenvärden är linjärt oberoende. Har sekularekvationen t ex en dubbelrot, KAN det gå att hitta linjärt oberoende egenvektorer men det är inte säkert. (För matrisen i tal 9b går det t ex inte!)

Betydligt bättre blir det dock om A är symmetrisk (dvs $A = A^T$). Då och endast då (jfr tal 13) går det att hitta en ON-transformation (dvs en övergång mellan två ON-baser) som diagonaliserar A. Detta är innebörden av den s k SPEKTRALSATSEN. En viktig användning av spektralsatsen är att transformera andragradsuttyck på s k huvudaxelform, vilket gör det lätt att se vad uttrycket betyder geometriskt. Exempel:

Ekvationen i tal 16 a kan skrivas (x,y)A(x,y)^T=5 där A=(6 -2 // -2 9) är symmetrisk. Sekularekvationen har rötterna $\lambda_1 = 5$ och $\lambda_2 = 10$ Sätter man (x,y)^T=C(u,v)^T där C är transformationsmatrisen får man (genom att ta transponatet av bägge led) (x,y)=(u,v)C^T. Vänstra ledet i ekvationen blir då = (u,v)C^{T}AC(u,v)^T=(u,v)C^{-1}AC(u,v)^T=(u,v)D(u,v)^T med D=(5 0//0 10). (Obs att C^T = C^{-1} gäller eftersom vi har en ON- transformation.) Ekvationen övergår nu i 5u^2+10v^2=5 dvs i u^2+2v^2=1 vilket är en ellips.

Samma teknik kan användas för att lösa tal 18. Den transformation man gör är nämligen en ren vridning som inte påverkar ellipsens yta. Lägg märke till att man för det mesta inte behöver bestämma C explicit , i tal 14 är det dock nödvändigt. Från $C^{-1}AC = D$ får man $A = CDC^{-1}$ och $A^2 = CDC^{-1} \cdot CDC^{-1} = CD^2C^{-1}$ etc. som ger $A^{10} = CD^{10}C^{-1}$.

Man får D^{10} enkelt genom upphöja diagonalelementen i D till 10. Sedan måste man visserligen multiplicera tre matriser med varandra för att få A^{10}, men hela denna metod med att bestämma egenvärden etc är ändå lättare än att försöka beräkna A^{10} direkt.