1.P$(A|(A \cup B^*)) = \frac{P(A\cap(A\cup B^*))}{P(A\cup B^*)}$. Vi har $P(A \cup B^*) = P(A) + P(B^*) - P(A \cap B^*) =$ (ober.)=0.2 + 0.7 - 0.2 x 0.7 = 0.76. För att beräkna $P(A \cap (A \cup B^*))$ är det bäst att rita en figur. $(A \cup B^*)$ brukar då ställa till problem, men om vi tar dess komplement så får vi (enligt de Morgans lag): $(A \cup B^*)^* = (A^* \cap B)$ och den sista mängden är inte så svår att rita. (Ett bra knep för att se vad ett snitt mellan två mängder blir, är att strecka den ena mängden med vågräta streck och den andra med lodräta. Snittet är då den mängd som blir "rutmönstrad".) Om du ritat rätt ser du nu att A ligger helt inne i $(A \cup B^*)$ vilket betyder $P(A \cap (A \cup B^*) = P(A) = 0.2$. Det sökta blir alltså 0.2/0.76 = 10/38=5/19. (OBS. A och $A \cup B^*$ är INTE oberoende eftersom den senare händelsen innehåller A.)

2. Man ska alltid börja med att införa beteckningar. Det räcker här med att beteckna två händelser: A= En enhet klassas som felaktig, B = En enhet är felaktig.

Sedan ser man på vad som är givet. Vi har: P(B)=0.05, $P(A|B) = 0.90$ (Och således $P(A^*|B) = 0.10$.) $P(A^*|B^*) = 0.80$ (Och således $P(A|B^*) = 0.20$.)

a. Sökt: $P(B^*|A^*) = \frac{P(B^*\cap A^*)}{P(A^*)}$.

Men $P(B^* \cap A^*) = P(A^*|B^*) \cdot P(B^*) = 0.80 \cdot (1 - 0.05) = 0.76$.

Och $P(A^*) =$ (Totala sannolikhetslagen)= $P(A^*|B^*) \cdot P(B^*) + P(A^*|B) \cdot P(B) = 0.765$. Således sökt= 0.76/0.765=0.993.

b. Sökt:$P((A \cap B^*) \cup (A^* \cap B)) =$ (disjunkt!)= $P(A \cap B^*) + P(A^* \cap B) = P(A|B^*) \cdot P(B^*) + P(A^*|B) \cdot P(B) = 0.20 \cdot 0.95 + 0.10 \cdot 0.05 = 0.195$

OBS. Ett vanligt misstag är att tro det som söks i 2b. är: $P((A|B^*) \cup (A^*|B))$, men att detta är fel kan man se direkt genom att uttrycket saknar matematisk mening. ($A|B^*$ och $A^*|B$ är ju inga mängder, så mellan dem kan inte $\cup$ stå!)

3a. Vi inför $Y_j = \frac{1}{X_j}$ och sätter summan i sannolikheten = Q. Då blir Q enl. centrala gränsvärdessatsen (FS 5) $\approx N(25\mu, 5\sigma)$ där $\mu = E(1/X) = \int_0^1 \frac{1}{x} f_X(x)dx$ där $f_X(x) = F'_X(x) = 3x^2$ om $0 < x < 1$ (= 0 annars.) Detta ger $\mu = 1.5$. På motsvarande sätt får man $\sigma^2 = E((1/X^2) - \mu^2 = 3 - (1.5)^2 = 0.75$. Q är alltså $\approx N(37.5, 5\sqrt{0.75}) = N(37.5, 4.33)$ Om vi normerar Q får vi $P((Q - 37.5)/4.33 > (30 - 37.5)/4.33) = 1 - \Phi(-1.73) = \Phi(1.73)$ (tabell 1)= 0.9582.

b. Z=ANTALET $X_j > 0.5$ är Bin (25,p) där p=$\int_{0.5}^1 3x^2dx = 7/8$. FS 3 ger V(Z)=25p(1-p)=175/64 varur D(Z) $\approx$ 1.65.

c. För att bestämma täthetsfunktioner tar man alltid "omvägen" över fördelningsfunktionen. Denna är nämligen (i motsats till täthetsfunktionen) en sannolikhet, vilket betyder att sannolikhetsformler kan användas. Eftersom Ω_W = 0<w<1 vet vi att täthetsfunktionen för W är noll utanför intervallet (0,1) och behöver alltså bara titta på 0<w<1. Där gäller $F_W(w) = P(W \leq w) = P(X^2 \leq w) = P(-\sqrt{w} \leq X \leq \sqrt{w}) = \int_{-\sqrt{w}}^{\sqrt{w}} f_X(x)dx = \int_0^{\sqrt{w}} 3x^2dx = \cdots = w^{3/2}$. Slutligen det sökta: $f_W(w) = F'_W(w) = \frac{3\sqrt{w}}{2}$ om 0<w<1. (=0 annars.)

4. Här handlar det om att använda FS 6 för att komma över till approximativ normalfördelning. Ett problem är därvid Z som inte uppfyller approximationsvillkoret. Vi inför därför W=Y+Z och Q=2X-W. X är Hyp (1000,50,0.4) $\approx$ Bin(50,0.4)$\approx$ N(20,$\sqrt{12}$) allt enligt FS 6. En känd sats för poisson- fördelning ger sedan att W=Y+Z är Po(16+3)=Po(19)

som uppfyller approximationsvillkoret $\geq$15. Således W$\approx$ N(19,$\sqrt{19}$) enligt FS 6. Eftersom en linjär sammansättning av oberoende normalfördelningar är normalfördelad får vi Q$\approx$ $N(\mu, \sigma)$. Här är $\mu = E(Q) = 2E(X) - E(W) = 2 \cdot 20 - 19 = 21$ och $\sigma^2 = V(Q) = 4V(X) + V(W) = 4 \cdot 12 + 19 = 67$. Q är alltså $\approx N(21, \sqrt{67}) = N(21, 8.19)$. Normering ger P((Q-21)/8.19 >(k-21)/8.19)=90%. Sätt a=(k-21)/8.19 och jämför med den övre figuren vid tabell 2 i FS. Hade vi haft 10 % hade a blivit =$\lambda_{0.10}$. Nu ligger vårt a-värde istället "spegelvänt" på andra sidan om (den ej utritade) y-axeln. Vi får därför
a= - $\lambda_{0.10} = -1.2816$ varur k $\approx$10.50. (10.51 om man räknar mer noga.)

5a. Eftersom väntevärden skattas med medeltal har vi $\theta^* = 3\bar{Y} - 2\bar{X}$.
$E(\theta^*) = 3E(\bar{Y}) - 2E(\bar{X}) =$ (jfr FS 11.1a)$= 3\mu_2 - 2\mu_1 = \theta$ vilket visar att θ^* är en väntevärdesriktig skattning av θ. Den sökta skattningen blir $\theta^*_{obs.} = 3(160/8) - 2(106/5) = 17.6 (\approx \theta)$.
b. Vi har $V(\theta^*) = 9 \cdot V(\bar{Y}) + 4 \cdot V(\bar{X}) =$ (Jfr återigen med parametrarna för medeltalet i FS 11.1a)$= 9\frac{\sigma_2^2}{8} + 4\frac{\sigma_1^2}{5} \approx 9\frac{s_2^2}{8} + 4\frac{s_1^2}{5}$. Här är $s_1^2 = \frac{1}{4}(2300 - (106)^2/5) = 13.2$. enligt FS 8. På samma sätt får man $s_2^2 = 300/7$. Vi får nu medelfelet $= D(\theta^*) = \sqrt{V(\theta^*)} \approx 7.67$.

6. Låt X_j beteckna den uppmätta vikten av kolv nr j och μ_j den verkliga vikten av kolv nr j. Vidare låter vi Y_j beteckna den upmätta vikten av kolv nr j med vätska. Hade kolvarna vägt lika mycket kunde vi ha använt FS 11.2d. Nu blir vi istället tvungna att använda "modellen för parvisa observationer".
Ursprunglig modell: X_j är $N(\mu_j, \sigma)$, Y_j är $N(\mu_j + \frac{\Delta}{3}, \sigma)$ (j=1,2,3). Samtliga 6 variabler oberoende.
Sätt nu $Z_j = Y_j - X_j$. Detta ger:
Ny modell: Z_1, Z_2, Z_3 är oberoende och $N(\frac{\Delta}{3}, \sigma\sqrt{2})$.
a. Jämförelse med tal 12.13 (13.11) ger $9.95 < \frac{\Delta}{3} < 10.45$(95%) varur $29.85 < \Delta < 31.35$(95%). Eftersom 31.5 inte tillhör detta intervall förkastas H_0. (Felrisk 5 %.)

b. Utgående från den nya modellen ovan ger FS 11.1b att $\frac{(3-1)S^2}{(\sigma\sqrt{2})^2}$ är χ^2-fördelat med parameter 2. Tabell 4 ger att $P(\frac{(3-1)S^2}{(\sigma\sqrt{2})^2} > \chi^2_{0.95}(2)) = 95\%$. Tabell 4 + förenkling och omformning av olikheten ger: $P(\sigma < S/\sqrt{0.10}) = 95\%$ Här ska $S_{obs.}$ (med hjälp av FS 8) beräknas från de observerade z-värdena dvs från $z_1 = 210.1 - 210 = 10.1$ etc. Vi får $S_{obs.} = 0.1$. Svaret blir $\sigma < 0.316$(95%). (Alt. svar: $0 < \sigma < 0.316$(95%) vilket också är ett ENSIDIGT intervall för σ eftersom den undre gränsen är trivialt sann.)
Kommentar: Det framgår inte i lösningen varför man ska starta just med $P(\frac{(3-1)S^2}{(\sigma\sqrt{2})^2} > \chi^2_{0.95}(2)) = 95\%$, men skulle man ha startat med $P(\frac{(3-1)S^2}{(\sigma\sqrt{2})^2} < \chi^2_{0.05}(2)) = 95\%$ istället finner man att detta (efter omformning) leder till att man får ett NEDÅT begränsat intervall för σ. Detta enda man behöver göra då är att gå tillbaka och starta om på rätt sätt, dvs vad man egentligen gör här är att pröva sig fram!