Institutionen för matematik.
KTH

Lösningar till tentamen i Matematik 1, 5B1115, för E, Media och IT tisdagen den 9/1 2001

1.

$$(x-\frac{2}{x})^{13} = x^{13}+...+\binom{13}{4}x^9(-\frac{2}{x})^4+\binom{13}{5}x^8(-\frac{2}{x})^5+...+(-\frac{2}{x})^{13} =$$

$$= x^{13}+...+\frac{13!}{9!4!}(-2)^4x^5+\frac{13!}{8!5!}(-2)^5x^3+...-\frac{2^{13}}{x^{13}}.$$

x^4:s koefficient $= \underline{0}$.
x^5:s koefficient $= \frac{13\cdot12\cdot11\cdot10\cdot2^4}{4\cdot3\cdot2\cdot1} = 13\cdot11\cdot10\cdot8 = \underline{11440}$.

2a.

$$y^2 = x \quad \& \quad y>0 \quad \Leftrightarrow \quad y=\sqrt{x} \quad \& \quad x>0$$

vilket definierar funktionen $y = y(x) = \sqrt{x}, \quad x>0$.

2b.

$$-\sqrt{y-1} = x \quad \& \quad x\le 0 \quad \Leftrightarrow \quad (-\sqrt{y-1})^2 = x^2 \quad \& \quad x\le 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$y-1 = x^2 \quad \& \quad x \le 0,$$

vilket definierar funktionen $y = y(x) = x^2+1, \quad x\le 0$.

2c.

$e^y = x-1 \quad , \quad x\le 1$ uppfylls inte av någon punkt (x,y),
eftersom $e^y>0$ för alla y.
Alltså: Ingen funktion $y(x)$ definieras.

3.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+3\sin(x+x^2)}{2x+3x^2+\cos x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2+\frac{3}{x^2}\sin(x+x^2)}{\frac{2}{x}+3+\frac{1}{x^2}\cos x} =$$

$$= \quad \frac{2+0}{0+3+0} = \underline{2/3},$$

eftersom

$$0 \leq \left| \frac{3\sin(x+x^2)}{x^2} \right| \leq \frac{3}{x^2} \to 0, \quad 0 \leq \left| \frac{\cos x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2} \to 0$$

och $\frac{2}{x} \to 0$ då $x \to +\infty$.

4. $g(x) = \frac{\sqrt{1+x+x^2}}{\cos 2x}$.

$$g'(x) = \frac{\cos 2x \cdot \frac{1}{2}(1+2x)(1+x+x^2)^{-1/2} - 2(-\sin 2x)(1+x+x^2)^{1/2}}{\cos^2 2x}.$$

$g'(0) = \frac{1/2+0}{1} = \underline{\frac{1}{2}}$.

5.

$$(*) \quad y'' + 2y' = 3x^2 \quad .$$

y_H : $r^2 + 2r = 0$ *ger* $r_1 = 0, r_2 = -2$.

$$y_H = A + Be^{-2x}$$

y_P : y saknas. Ansätt $y_P = ax^3 + bx^2 + cx$,
(konstantterm finns redan i y_H)
$y_P' = 3ax^2 + 2bx + c$, $y_P'' = 6ax + 2b$.
Insättning i $(*)$ ger:
$6ax + 2b + 6ax^2 + 4bx + 2c = 3x^2$
Identifiering ger:

$$\begin{aligned} x^2 : &\quad 6a = 3, \quad a = 1/2 \\ x : &\quad 6a + 4b = 0, \quad b = -3a/2 = -3/4 \\ 1 : &\quad 2b + 2c = 0. \quad c = -b = 3/4 \end{aligned}$$

Man får $y_P = x^3/2 - 3x^2/4 + 3x/4$

$$y \quad = \quad y_H + y_P = \underline{A + Be^{-2x} + x^3/2 - 3x^2/4 + 3x/4}.$$

6. Lös ekvationen

$$z^3 = 1 + i(\sqrt{3} - 1) - \frac{5}{2+i} \quad = \quad 1 + i(\sqrt{3} - 1) - \frac{5(2-i)}{(2+i)(2-i)} =$$

$$1 + i(\sqrt{3} - 1) - \frac{5(2-i)}{5} = 1 + i(\sqrt{3} - 1) - (2 - i) = -1 + i\sqrt{3} = 2e^{i(\frac{2\pi}{3} + 2n\pi)}$$

Lös alltså $z^3 = 2e^{i(\frac{2\pi}{3} + 2n\pi)}$.

Sätt $z = re^{i\theta}$:

$$r^3 e^{i3\theta} = 2e^{i(\frac{2\pi}{3} + 2n\pi)} \quad \text{ger}$$

$$r^3 = 2, \quad r = 2^{1/3}$$

$$3\theta = 2\pi/3 + 2n\pi, \quad \theta = 2\pi/9 + 2n\pi/3, \quad n = 0, 1, 2.$$

$$z_0 = \underline{2^{1/3} e^{i\frac{2\pi}{9}}}, \quad z_1 = \underline{2^{1/3} e^{i\frac{8\pi}{9}}}, \quad z_2 = \underline{2^{1/3} e^{i\frac{14\pi}{9}}},$$

7.

$$\lim_{x \to 1} \quad \frac{\sin(\pi \cos(\pi x))}{\ln^2 x} \quad = \quad \left[\frac{'0'}{0}, l'H \right] \quad =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\cos(\pi \cos(\pi x))(-\pi \sin(\pi x)) \cdot \pi}{2 \ln x \cdot (1/x)} = \lim_{x \to 1} -\frac{\pi^2}{2} \cdot \frac{\cos(\pi \cos(\pi x)) \sin(\pi x)}{\ln x / x} =$$

$$= \quad \left[\frac{'0'}{0}, l'H \right] \quad =$$

$$(-\frac{\pi^2}{2}) \lim_{x \to 1} \frac{-\sin(\pi \cos(\pi x))(-\pi^2 \sin(\pi x)) \sin \pi x + \cos(\pi \cos(\pi x)) \pi \cos(\pi x)}{\frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2}} =$$

$$= \quad (-\frac{\pi^2}{2})\frac{0+\pi\cos(-\pi)\cos(\pi)}{1} \quad = \quad -\frac{\pi^2}{2}\cdot\pi \quad = \quad \underline{-\frac{\pi^3}{2}}$$

.

8. $f(x) = \arctan x - \ln(1+\frac{4x}{3}) \leq 0$ ska visas för $x \geq 0$.

$$f(0) = 0.$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{4/3}{1+4x/3} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{4}{3+4x} = \frac{(3+4x)-4(1+x^2)}{(1+x^2)(3+4x)} =$$

$$= \frac{(-1+4x-4x^2)}{(1+x^2)(3+4x)} = \frac{-(1-2x)^2}{(1+x^2)(3+4x)} \leq 0.$$

Alltså är $f(x)$ avtagande för $x \geq 0$.
Detta tillsammans med att $f(0) = 0$ medför att $f(x) \leq 0$ för $x \geq 0$.

9.

$$G(x) = |x\ln|x|| - |x|\ln|x|, \quad G(-x) = |-x\ln|x|| - |x|\ln|x| = G(x)$$

dvs G är en jämn funktion.
Det räcker alltså att studera $G(x)$ för $x > 0$ samt att bestämma $\lim_{x\to 0+} G(x)$ ($G(0)$ är ej definierad)

1. $x \geq 1 : \ln|x| \geq 0$ och alltså $x\ln|x| \geq 0$.
Man får $G(x) = |x\ln|x|| - |x|\ln|x| = x\ln|x| - x\ln|x| = 0$.

2. $0 < x < 1 : \ln|x| \leq 0$ och alltså $x\ln|x| \leq 0$.
Man får $G(x) = |x\ln|x|| - |x|\ln|x| = -x\ln|x| - x\ln|x| = -2x\ln x$.
Observera att G är kontinuerlig i $x = 1 : G(1) = \lim_{x\to 1-} G(x) = 0$.
Stationär punkt: $G'(x) = -2\ln x - 2x/x = -2(\ln x + 1) = 0$ då
$\ln x = -1, x = e^{-1}$.
$G(e^{-1}) = \frac{2}{e}$.

3. $\lim_{x\to 0+} G(x) = \lim_{x\to 0+} -2x\ln x = (-2)\lim_{x\to 0+} x\ln x = 0$ (standard).

Eftersom G är kontinuerlig för $x > 0$ antas alla värden mellan maxvärdet $2/e$ och minvärdet 0.

Sammanfattningsvis: Värdemängden ges av $\underline{0 \leq G(x) \leq \frac{2}{e}}$.

10. Visa med induktionsbevis att
$P(n): \quad |\sin nx| \leq n \sin x \quad$ för $0 \leq x \leq \pi/2, \quad$ då $n = 1, 2, 3, \ldots$.

$P(1): \quad |\sin x| \leq \sin x$ sant eftersom $\sin x \geq 0$ i intervallet.

Antag $P(m): \quad |\sin mx| \leq m \sin x \quad$ för $0 \leq x \leq \pi/2$.
$P(m+1): \quad |\sin(m+1)x| \leq (m+1) \sin x \quad$ för $0 \leq x \leq \pi/2$ ska visas.

$|\sin(m+1)x| = |\sin(mx + x)| = |\sin mx \cos x + \cos mx \sin x| \leq$
(triangelolikheten)
$\leq |\sin mx| \cdot |\cos x| + |\cos mx| \cdot |\sin x| \leq (*) \leq m \sin x + \sin x = (m+1) \sin x$
VSV.
$(*)$ Här användes:
$P(m): |\sin mx| \leq m \sin x, \quad |\cos x| \leq 1, \quad |\cos mx| \leq 1$ och $|\sin x| = \sin x$ i intervallet.