Institutionen för matematik.
KTH

Lösningar till tentamen i Matematik 1, 5B1115, för E, Media och IT måndagen den 20/8 2001

1.a

$$\begin{aligned}
5\sin 2x &= 2\cos x \\
10\sin x\cos x - 2\cos x &= 0 \\
2\cos x(5\sin x - 1) &= 0 \\
\cos x = 0 &\quad \text{ger} \quad x = \underline{\pi/2 + n\pi} \\
\sin x = 1/5 &\quad \text{ger} \quad x = \underline{\arcsin(1/5) + 2n\pi} \quad \text{och} \\
&\qquad\qquad x = \underline{\pi - \arcsin(1/5) + 2n\pi}
\end{aligned}$$

1.b

$$\begin{aligned}
2\sin 2x &= 5\cos x \\
4\sin x\cos x - 5\cos x &= 0 \\
\cos x(4\sin x - 5) &= 0 \\
\cos x = 0 &\quad \text{ger} \quad x = \underline{\pi/2 + n\pi} \\
\sin x = 5/4 > 1 &\quad \text{ger inga reella lösningar.}
\end{aligned}$$

1.c

$$\begin{aligned}
2\sin 2x &= 5\cos^2 x \\
4\sin x\cos x - 5\cos^2 x &= 0 \\
\cos x(4\sin x - 5\cos x) &= 0 \\
\cos x = 0 &\quad \text{ger} \quad x = \underline{\pi/2 + n\pi} \\
\tan x = 5/4 &\quad \text{ger} \quad x = \underline{\arctan(5/4) + n\pi}.
\end{aligned}$$

2.

$$\lim_{x\to 0+}(e^{2x}-1)\ln x =$$
$$\lim_{x\to 0+}(1+2x+\mathit{O}(x^{\mathit{2}})-\mathit{1})\ln x =$$
$$\lim_{x\to 0+} 2x\ln x + \lim_{x\to 0+} \mathit{O}(x^{\mathit{2}})\ln x = \mathit{0}+\mathit{0} = \underline{\mathit{0}}$$

3.

$$(*) \quad e^{3y} - y = x^2 + x + 1 \quad , \quad y(0) = 0.$$

$\frac{d}{dx}(*):\quad 3e^{3y}y' - y' = 2x+1.$
$x = 0 \quad \Rightarrow \quad 3e^0\cdot y'(0) - y'(0) = 1. \quad y'(0) = 1/2.$

$\frac{d^2}{dx^2}(*):\quad 9e^{3y}(y')^2 + 3e^{3y}y'' - y'' = 2$
$x = 0 \quad \Rightarrow \quad 9e^0\cdot(1/2)^2 + 3e^0\cdot y''(0) - y''(0) = 2,$
$y''(0) = (2-9/4)/2 = -1/8.$

MacLaurinutveckling: $y(x) = 0 + (\frac{1}{2})x + (-\frac{1}{8})\frac{x^2}{2} + R_2 = \underline{\frac{x}{2} - \frac{x^2}{16} + R_2}$

4. $P(z) = z^3 + 9z^2 + 19z + 35 = 0.$
Om $z_1 = -1+2i$ är en rot, är också $z_2 = \underline{-1-2i}$ en rot, eftersom $P(z)$ är reell.
$(z-z_1)(z-z_2) = (z+1-2i)(z+1+2i) = (z+1)^2 + 4 = z^2 + 2z + 5$ är en faktor i $P(z)$.
Division ger $P(z) = (z^2+2z+5)(z+7)$, dvs $z_3 = \underline{-7}$ är också en rot.

5.

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin^2 x+\cos x\ln(x/\pi)}{\sin 2x+\sin x\ln(x/\pi)}=\left[\frac{'0'}{0},l'H\right]=$$
$$\lim_{x\to\pi}\frac{2\sin x\cos x-\sin x\ln(x/\pi)+\cos x\cdot 1/x}{2\cos 2x+\cos x\ln(x/\pi)+\sin x\cdot 1/x}=$$
$$\frac{0-0-1/\pi}{2+0+0}=\underline{-\frac{1}{2\pi}}$$

6. $y''+a^2y=\sin bx,\quad a\neq b.$

$y_H:\quad r^2+a^2=0,\quad r=\pm ia$
$y_H=A\sin ax+B\cos ax.$

$y_P:\quad (D^2+a^2)y=Im(e^{ibx})(=\sin bx).$
Låt y^* vara lösningen till $(D^2+a^2)y^*=e^{ibx}$.
Då gäller $y_P=Im(y^*)$

Sätt $y^*=ze^{ibx}$.

$$(D^2+a^2)ze^{ibx}=e^{ibx}$$
Förskjutn.regeln ger $e^{ibx}((D+ib)^2+a^2)z=e^{ibx}$
$$(D^2+2ibD+a^2-b^2)z=1$$

Ansätt $z=c$: $0+0+(a^2-b^2)c=1,\quad c=\frac{1}{a^2-b^2}$

$$y^*=\frac{e^{ibx}}{a^2-b^2},\qquad y_P=Im(y^*)=\frac{\sin bx}{a^2-b^2}$$

Svar:

$$y=\underline{A\sin ax+B\cos ax+\frac{\sin bx}{a^2-b^2}}$$

7.

$$e^{-2x} \le \frac{1}{1+2x+2x^2}, \quad x \ge 0$$

Eftersom bägge leden är positiva är olikheten ekvivalent med:
$e^{2x} \ge 1+2x+2x^2$ eller $G(x) = e^{2x} - 1 - 2x - 2x^2 \ge 0, \quad x \ge 0.$
$G(0) = 0$
$G'(x) = 2e^{2x} - 2 - 4x, \quad G'(0) = 0$
$G''(x) = 4e^{2x} - 4 = 4(e^{2x} - 1) \ge 0$ för $x \ge 0$
Alltså : $G'(x)$ är växande då $x \ge 0$.
$G'(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad G'(x) \ge 0$ då $x \ge 0$.
Alltså : $G(x)$ är växande då $x \ge 0$.
Men $G(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad G(x) \ge 0$ då $x \ge 0$. VSB.

8. $F(x) = 2\ln(x+1) - \ln(x^2+1) + \frac{x}{x+1}, \quad x > -1.$
Värdemängden söks.
$F'(x) = \frac{2}{x+1} - \frac{2x}{x^2+1} + \frac{(x+1)\cdot 1 - x\cdot 1}{(x+1)^2} =$
$= \quad ... \quad = \frac{-x^2+3}{(x+1)^2(x^2+1)} = 0$ för $x = \sqrt{3} \quad (-\sqrt{3})$
$\lim_{x\to -1+} F(x) = -\infty$, eftersom både $2\ln(x+1)$ och $\frac{x}{x+1} \to -\infty$ medan $-\ln(x^2+1) \to -\ln 2$ då $x \to -1+$
$-1 < x < \sqrt{3} : F'(x) > 0 \Rightarrow F(x)$ är växande.
$F(\sqrt{3}) = 2\ln(\sqrt{3}+1) - \ln 4 + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} = 2\ln\frac{\sqrt{3}+1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} \approx 1.26.$
$\sqrt{3} < x < \infty : F'(x) < 0 \Rightarrow F(x)$ är avtagande.
$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty}(\ln\frac{(x+1)^2}{x^2+1} + \frac{x}{x+1}) =$
$\lim_{x\to\infty}(\ln(\frac{1+2/x+1/x^2}{1+1/x^2})) + \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+1/x} = \ln 1 + 1 = 1.$
F är kontinuerlig i sin definitionsmängd.
Detta ger värdemängden: $-\infty < F(x) \le 2\ln\frac{\sqrt{3}+1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$.

9.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{1}{12}$$

innebär att för alla $\varepsilon > 0$ finns ett tal N_ε så att
$x > N_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad |f(x) - 1/12| < \varepsilon$
Välj $\varepsilon = 1/12$:
$|f(x) - 1/12| < 1/12 \quad \Rightarrow \quad f(x) > 0.$
Alltså finns ett N (exempelvis $N_{1/12}$) så att $x > N \quad \Rightarrow \quad f(x) > 0.$
VSB.

10. Visa med induktionsbevis att

$P_n : 3^n > 4n^2 + 2^n$, gäller för $n = 4, 5, 6, ...$

$P_4 : 3^4 = 81 > 4 \cdot 4^2 + 2^4 = 64 + 16 = 80$, stämmer.

Antag P_n.

$P_{n+1} : 3^{n+1} > 4(n+1)^2 + 2^{n+1}$, ska visas.

$3^{n+1} = 3 \cdot 3^n >$ [använd P_n] $> 3(4n^2 + 2^n) = 12n^2 + 3 \cdot 2^n =$
$= 4n^2 + 8n^2 + 3 \cdot 2^n > [(*)] > 4n^2 + 8n + 4 + 2 \cdot 2^n = 4(n+1)^2 + 2^{n+1}$,
vilket är högerledet i P_{n+1}. VSB.

(*) eftersom $8n^2 > 8n+4$ för $n = 4, 5, 6, ...$ ($8 \cdot 4^2 = 128 > 8 \cdot 4 + 4 = 36$ och $8n^2$ växer snabbare än $8n + 4$.)