Institutionen för matematik.
KTH

Lösningar till tentamen i Matematik 2, 5B1116, för E, Media och IT lördagen den 1/9 2001

1.

$$\int_0^{1/2} x\arctan 2x dx = \left[\tfrac{x^2}{2}\arctan 2x\right]_0^{1/2} - \int_0^{1/2} \frac{x^2}{2}\cdot\frac{2}{1+4x^2}dx =$$

$$\frac{1}{8}\arctan 1 - 0 - \int_0^{1/2} \frac{x^2+1/4-1/4}{1+4x^2}dx = \frac{1}{8}\cdot\frac{\pi}{4} - \int_0^{1/2}(\frac{1}{4} - \frac{1/4}{1+4x^2})dx =$$

$$\frac{\pi}{32} - \left[\tfrac{x}{4} - \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{2}\arctan 2x\right]_0^{1/2} =$$

$$\frac{\pi}{32} - (\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cdot\frac{\pi}{4} - 0) = \underline{\frac{\pi}{16} - \frac{1}{8}}$$

2.

$$V = \pi\int_e^{\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x} = \begin{bmatrix} t = \ln x \\ dt = \frac{dx}{x} \end{bmatrix} = \pi\int_e^{\infty}\frac{dt}{t^2} =$$

$$\pi\left[-\tfrac{1}{t}\right]_e^{\infty} = \pi(0-(-1) = \underline{\pi}.$$

3.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 3 & 3 & 1 \\ -3 & -5 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 7 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

VGV

3. forts.

$det(A) = 2(6+5) + 3(6+3) + 7(-15+9) = 22 + 27 - 42 = 7.$
$det(B) = 2(-4-6) + 0 + 8(3+7) = -20 + 80 = 60$
$det(AB) = det(A) \cdot det(B) = 7 \cdot 60 = \underline{420}.$

4.

Kurvan: $x = t^2, y = 2t, z = \ln(t/2)(= \ln t - \ln 2)$. $t = 2$ svarar mot punkten $(4,4,0)$.
Tangentvektor: $\bar{T}(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) = (2t, 2, 1/t)$.
I den givna punkten: $\bar{T}(2) = \underline{(4,2,1/2)}$.
$F(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$, $gradF = (2x, 4y, 6z)$, $gradF(4,4,0) = (8,16,0)$.
$f(t) = F(x(t), y(t), z(t))$, $f'(t) = F_x x'(t) + F_y y'(t) + F_z z'(t) = gradF \cdot \bar{T}(t)$.
$f'(2) = gradF(4,4,0) \cdot \bar{T}(2) = (8,16,0) \cdot (4,2,1/2) = \underline{64}.$
Riktningsderivatan i riktningen $\bar{u} = \bar{T}(2)/|\bar{T}(2)|$ ges av:
$F'_{\bar{u}}(4,4,0) = gradF(4,4,0) \cdot \bar{u} = (8,16,0) \cdot \frac{(4,2,1/2)}{\sqrt{16+4+1/4}} = \frac{64}{\sqrt{81/4}} = \underline{\frac{128}{9}}$

5. $u = x\cos y, \quad v = y \sin x.$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{bmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos y & -x\sin y \\ y\cos x & \sin x \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}(\pi,\pi) = \underline{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -\pi & 0 \end{bmatrix}}$$

$$\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}(\pi,\pi)\right| = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -\pi & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Eftersom Jacobi-matrisens determinant är 0 i punkten,
<u>existerar ingen differentierbar invers där.</u>

6. $C = ABA^{-1}$, A och B är inverterbara.

$CA = ABA^{-1}A = AB.$
$B = A^{-1}AB = \underline{A^{-1}CA}.$
$C^{-1} = (ABA^{-1})^{-1} = (A^{-1})^{-1}B^{-1}A^{-1} = \underline{AB^{-1}A^{-1}}$
(Verifiering: $CC^{-1} = ABA^{-1}AB^{-1}A^{-1} = ABB^{-1}A^{-1} = AA^{-1} = E.$)
$det(C) = det(ABA^{-1}) = det(A)det(B)det(A^{-1}) = det(A)det(B)\frac{1}{det(A)} = det(B).$ VSV.

7. $F = x^2 + 2y^2 - 2yt + t^2 - 3 = 0$
$G = x^2 + y^2 + t^2 - 6 = 0$
Observera att $(x, y, t) = (1, 1, 2)$ uppfyller ekvationerna.
Ekvationerna definierar differentierbara funktioner $x(t)$ och $y(t)$,
om $\left|\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right| \neq 0$.
$\left|\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right| = \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 4y-2t \\ 2x & 2y \end{vmatrix}$.
$\left|\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right| |_{t=2} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 0 = 4 \neq 0.$
Alltså är funktionerna definierade i en omgivning av $t = 2$,
så att $x(2) = y(2) = 1$.
Derivering av ekvationerna m.avs. på t ger:

$$\begin{aligned} 2xx' + 4yy' - 2y't - 2y + 2t &= 0 \\ 2xx' + 2yy' + 2t &= 0 \end{aligned}$$

Insättning av $x = y = 1, \quad t = 2$ ger:

$$\begin{aligned} 2x'(2) + 0 &= -2 \\ 2x'(2) + 2y'(2) &= -4 \end{aligned}$$

varav $\underline{x'(2) = -1, \quad y'(2) = -1}$.

8. $G(x, y) = x^3 - 5xy - 2x + 6y$

$$\begin{aligned} G_x &= 3x^2 - 5y - 2 = 0 \\ G_y &= \quad -5x + 6 = 0 \end{aligned}$$

$x = 6/5, \quad 5y = 3(6/5)^2 - 2 = 58/25, \quad y = 58/125.$
Stationär punkt: $\quad (x, y) = (6/5, 58/125).$

$$\begin{aligned} G_{xx} &= 6x & A &= 36/5 \\ G_{xy} &= -5 & B &= -5 \\ G_{yy} &= 0 & C &= 0 \end{aligned}$$

$AC - B^2 = -25 \quad \Rightarrow \quad \underline{(x, y) = (6/5, 58/125)}$ är en $\underline{\text{sadelpunkt}}$.

9. Cylinderns volym : $V(r,h) = \pi r^2 h$,
där r är den inskrivna cylinderns radie och h dess höjd.
Bivillkor: $r^2 + (h/2)^2 = R^2$.
Lagrangefunktionen blir alltså:
$\Phi = \pi r^2 h + \lambda(r^2 + h^2/4 - R^2)$

$$\Phi_r = 2\pi r h + 2\lambda r \quad = 0 \tag{1}$$
$$\Phi_h = \pi r^2 + \lambda h/2 \quad = 0 \tag{2}$$
$$\Phi_\lambda = r^2 + h^2/4 - R^2 = 0 \tag{3}$$

Vi söker lösningar för $r > 0, \quad h > 0$.
(1) ger $\lambda = -\pi h$
(2) ger $\pi r^2 = \pi h^2/2, \quad r = \frac{h}{\sqrt{2}}$,
insatt i (3) : $h^2/2 + h^2/4 = R^2, \quad 3h^2/4 = R^2, \quad h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$,
vilket ger $r = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}R$ och den maximala volymen $\underline{V = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}R^3}$.

10. Sätt $f(x)g(x) = U(f(x), g(x))$, där
$U(f,g) = fg$.
Flervariabelkedjeregeln ger:
$(f(x)g(x))' = \frac{\partial u}{\partial f}f' + \frac{\partial u}{\partial g}g' = gf' + fg'$. VSV.