Institutionen för matematik.
KTH

Tentamen i Matematik 2, 5B1116, för E , Media och IT, lördagen den 1/9 2001

Skrivtid: 08.00 - 13.00
Inga hjälpmedel tillåtna.
För godkänt = betyg 3 fordras minst 16 poäng, för betyg 4 minst 22 poäng och för betyg 5 minst 30 poäng inklusive bonuspoäng. Det maximala antalet poäng på varje uppgift är angivet inom parentes i anslutning till uppgiften.
Ange dina bonuspoäng på omslaget.
Examinatorer: Gunnar Johnsson och Olle Stormark.

1. (3p.) Beräkna integralen

$$\int_0^{1/2} x \arctan 2x \, dx.$$

2. (3p) Bestäm volymen av den rotationskropp som uppstår då ytan, definierad av $0 \leq y \leq \frac{1}{\sqrt{x}\ln x}$, $\quad x \geq e$, roterar omkring x-axeln. Använd formeln $V = \pi \int_a^b y(x)^2 \, dx$.

3. (3p) Bestäm determinanten $\det(AB)$ då

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 3 & 3 & 1 \\ -3 & -5 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 7 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

4. (3p) Betrakta kurvan definierad av $x(t) = t^2, y(t) = 2t, z(t) = \ln(t/2)$. Bestäm en tangentvektor med positiv x-komponent till kurvan i punkten $(x, y, z) = (4, 4, 0)$.
Bestäm också derivatan $f'(2)$ då f definieras av $f(t) = F(x(t), y(t), z(t))$, där $F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$.
Bestäm slutligen F:s riktningsderivata i punkten $(4, 4, 0)$ i tangentvektorns riktning.

VGV

5. (3p) Bestäm Jacobi-matrisen i punkten $(x, y) = (\pi, \pi)$ för transformationen definierad av $u = x \cos y, \quad v = y \sin x$.
Avgör också om transformationen har en differentierbar invers i en omgivning av denna punkt.

6. (4p) Matriserna A och B antages vara inverterbara nxn-matriser.
Matrisen C definieras av $C = ABA^{-1}$.
Uttryck B med hjälp av A och C samt C^{-1} med hjälp av A och B.
Visa slutligen att $\det(C) = \det(B)$.

7. (4p) Visa att ekvationerna

$$x^2 + 2y^2 - 2yt + t^2 = 3$$
$$x^2 + y^2 + t^2 = 6$$

definierar x och y som funktioner av t i en omgivning av $t = 2$, så att $x(2) = y(2) = 1$.
Bestäm dessutom derivatorna av dessa funktioner med avseende på t i $t = 2$.

8. (4p) Bestäm alla stationära punkter för $G(x, y) = x^3 - 5xy - 2x + 6y$ samt avgör deras karaktär.

9. (4p) Bestäm med Lagranges metod den maximala volymen av en cylinder som kan inskrivas i en sfär med radien R.

10. (4p) Produktregeln för derivering av envariabelfunktioner lyder som bekant $(fg)' = f'g + fg'$.
Bevisa denna regel med hjälp av kedjeregeln för flervariabelfunktioner.
Ledning: Produkten fg kan ses som en funktion av de två variablerna f och g.