Institutionen för matematik.
KTH

Tentamen 1 i Matematik 2, 5B1116, för E och Media, fredagen den 22/12 2000

Skrivtid: 08.00 - 13.00
Inga hjälpmedel tillåtna.
För godkänt = betyg 3 fordras minst 16 poäng, för betyg 4 minst 22 poäng och för betyg 5 minst 30 poäng inklusive bonuspoäng. Det maximala antalet poäng på varje uppgift är angivet inom parentes i anslutning till uppgiften. Ange dina bonuspoäng på omslaget. Examinator: Gunnar Johnsson

1. (3p) Beräkna integralen $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2(x+2)}$.

2. (3p) Beräkna minsta avståndet mellan punkten P $(1, -1, 3)$ och planet $3x + y - z = 1$.

3. (3p) Bestäm riktningsderivatan för $F(x, y, z) = xy^2 + 2yz^2$ i punkten $(1, 1, 2)$ i den riktning som definieras av den utåtriktade normalen till ellipsoiden $x^2 + 3y^2 + 2z^2 = 12$ i punkten.

4. (3p) Bestäm Jacobimatrisen i punkten $(1, 1)$ för funktionen

$$\mathbf{f}(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2x \ln y \end{pmatrix}$$

samt avgör om $\mathbf{f}$ har en differentierbar invers i en omgivning av punkten.

5. (3p) Bestäm en transformation som överför den kvadratiska formen $Q(x,y) = 2x^2 + 6xy + 10y^2$ till kanonisk form (diagonalform) samt avgör om kurvan definierad av Q(x,y) = 1 är en ellips eller en hyperbel.

6. (4p) Härled m.hj.a. Riemannsummor formeln för arean av den rotationsyta som uppkommer då kurvan $y = f(x) \quad (f(x) > 0 \quad ,$ f deriverbar), $\quad a \leq x \leq b$, roterar omkring x-axeln.
Ledning: Ett linjestycke L, som inte skär x-axeln, alstrar vid rotation omkring x-axeln en yta vars area är $2\pi rs$, där r är avståndet mellan x-axeln och L:s mittpunkt och där s är L:s längd.

7. (4p) Antag att $f(x,y)$ uppfyller $f_y = f_{xx} - 2f_x$.
Bestäm a och b så att $u(x,y) = e^{ax+by}f(x,y)$ uppfyller
$u_y = u_{xx}$.

8. (4p) Bestäm de stationära punkterna för $G(x,y) = x^2y + 3x^3 - 2y^2 - 36x^2$ samt avgör deras karaktär.

9. (4p) Anpassa en rät linje med hjälp av minstakvadratmetoden till punkterna:
$(0,0), (2,1), (3,2) \quad \text{och} \quad (4,4)$.

10. (4p) Antag att A är en inverterbar nxn-matris som avbildar enhetscirkeln (enhetssfären,...) $\mathbf{x}^T\mathbf{x} = 1$ på ellipsen (ellipsoiden,...) E .
Bestäm E:s ekvation uttryckt i de nya koordinaterna $\mathbf{x}'$, som införs genom transformationen $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$.
($\mathbf{x}^T = (x_1, ..., x_n)$ och $\mathbf{x}'^T = (x'_1, ..., x'_n)$).
Tillämpa detta resultat i fallet

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$