Institutionen för matematik.
KTH

Provtentamen 1 i Matematik 2, 5B1116, för E och Media, december 2000

Skrivtid: 08.00 - 13.00
Inga hjälpmedel tillåtna.
För godkänt = betyg 3 fordras minst 16 poäng, för betyg 4 minst 22 poäng och för betyg 5 minst 30 poäng inklusive bonuspoäng. Det maximala antalet poäng på varje uppgift är angivet inom parentes i anslutning till uppgiften. Ange dina bonuspoäng på omslaget. Examinator: Gunnar Johnsson

1. (3p) Beräkna integralen $\int_{-1}^{1} x^2(\ln^2|x| + \sin^3 x)\,dx$

2. (3p) Beräkna minsta avståndet mellan linjerna
$\mathbf{r} = (3, 0, 5) + t(1, -1, 1)$ och
$x = -1 + t, y = 3, z = -1 + 2t.$

3. (3p) Bestäm k så att följande linjära ekvationssystem saknar entydig lösning:

$$\begin{aligned} x + 4y - 2z &= 1 \\ 2x + 7y + 3z &= -1 \\ -2x + 7y + kz &= m \end{aligned} \tag{1}$$

Bestäm m för detta k-värde så att systemet får oändligt många lösningar samt lös systemet för dessa värden på k och m.

4. (3p) Transformera $z_x^2 - z_y^2$ genom variabelbytet

$$x = u - v$$
$$y = u + v$$

(2)

5. (3p) Bestäm en transformation som överför den kvadratiska formen $Q(x, y) = 7x^2 - 6xy - y^2$ till kanonisk (diagonal) form
samt avgör om kurvan $Q(x, y) = 1$ är en ellips eller en hyperbel.

6. (4p) Härled formeln för arean $A = \int\limits_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{r^2(\theta)}{2} d\theta$
av den yta som begränsas av kurvan $r = r(\theta)$ $(\theta_0 < \theta < \theta_1)$ samt de räta linjerna $\theta = \theta_0$ och $\theta = \theta_1$. (Polära koordinater).
Använd Riemannsummor eller annan areaformel.

7. (4p) Visa att vektorn grad $f(a, b, c)$ är vinkelrät mot ytan $f(x, y, z) = C$ i punkten (a, b, c) , då $C = f(a, b, c)$.

8. (4p)

Bestäm en 3x2-matris M så att BM = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, där B = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

Använd detta resultat för att bestämma en lösning till matrisekvationen XB = C , (där C är en 2x3-matris), **om** en sådan lösning existerar.
Visa sedan att ekvationen XB = C saknar lösning
då C =

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

.

9. (4p) Visa att ekvationerna $x + y^2 + 2u - v^2 = 3$ och $x^2 + 2y - u^2 + v = 3$ definierar differentierbara funktioner $u(x, y)$ och $v(x, y)$ i en omgivning av $(x, y) = (1, 1)$ så att $u(x, y) = v(x, y) = 1$.
Bestäm även Jacobimatrisen $\frac{d(u,v)}{d(x,y)}$ i $(x, y) = (1, 1)$.

10. (4p) Maximera och minimera $F(x, y) = xy^3$ under bivillkoret $x^4 + y^4 = 1$.