Introduktion

Avsnitt 1 handlar till att börja med om hantering av **bråkstreck**. Samtidigt ges exempel och övningar där **parametrar** förekommer. Man får alltså tillfälle att öva bokstavsräkning. Slutligen tillämpas dessa tekniker vid ekvationslösning där ekvationerna efter förenkling normalt övergår i **förstagradsekvationer med parametrar**.

Målsättning:

Efter studium av Avsnitt 1 skall du kunna:

- obehindrat hantera bråkstreck enskilt eller i samband med ekvationer
- lösa ekvationer av ovanstående typ som innehåller parametrar.

Exempel 1

Sätt följande uttryck på gemensamt bråkstreck:	
(*) $\dfrac{3}{x+1}+\dfrac{7}{x-1} =$	Den minsta gemensamma nämnaren är alltså här (x+1)(x-1). Mönstret är : 3/a + 7/b = (3b+7a)/ab
(1) $\dfrac{3(x-1)+7(x+1)}{(x+1)(x-1)} =$	Konjugatregeln kan användas i nämnaren.
(2) $\dfrac{3x-3+7x+7}{x^2-1} =$	Uttrycket på enklast möjliga form.
(3) $\dfrac{10x+4}{x^2-1}.$	

Exemple 2

Sätt följande uttryck på gemensamt bråkstreck:	
(*) $\dfrac{2a}{x^2-1} + \dfrac{a+1}{(x+1)^2} =$	För att hitta den minsta gemensamma nämnaren faktoriserar vi första nämnaren.
(1) $\dfrac{2a}{(x+1)(x-1)} + \dfrac{a+1}{(x+1)^2} =$	Här ser man att minsta gemensamma nämnaren är $(x+1)^2(x-1)$
(2) $\dfrac{2a(x+1)+(a+1)(x-1)}{(x+1)^2(x-1)} =$	Mönstret är : $k_1/AB + k_2/A^2 = (k_1A + k_2B)/A^2B$.
(3) $\dfrac{2ax+ax+x+2a-a-1}{(x+1)^2(x-1)} =$	I täljaren kan man exempelvis skriva *x*-termerna för sig och konstanttermerna för sig.
(4) $\dfrac{(3a+1)x+a-1}{(x+1)^2(x-1)}.$	Nämnaren skrivs enklast i faktoriserad form.

Exempel 3

Lös följande ekvation:

$$(*) \qquad \frac{a}{x+b} = \frac{b}{x+1}$$

$$(1) \qquad a(x+1) = b(x+b)$$

$$(2) \qquad ax + a = bx + b^2$$

$$(3) \qquad ax - bx = b^2 - a$$

$$(4) \qquad x(a-b) = b^2 - a$$

$$(5) \qquad x = \frac{b^2 - a}{a - b}.$$

Ekvationen skall lösas med avseende på *x*.

Korsmultiplicering gör att bråkstrecken försvinner. (Egentligen multiplicerar man båda leden med $(x+b)(x+1)$.

Observera steget mellan (3) och (4) som ibland vållar problem.

Man måste alltså skjuta in en parentes i vänsterledet i (4) för att komma vidare och lösa ut *x*.

Lösningen (5) gäller inte om nämnaren $a\text{-}b = 0$.

Vad som händer i fallet $a=b$ behandlas här .
Försök gärna själv först!

Exempel 4

Lös följande ekvation:	
$$(*) \qquad \frac{3x}{3x+1+\frac{x-1}{x-a}} = 1$$	Ekvationen skall lösas med avseende på *x*. Nämnaren i vänsterledet flyttas över till högerledet. (Egentligen multiplicerar man båda leden med nämnaren.)
$$(1) \qquad 3x = 3x+1+\frac{x-1}{x-a}$$	I steget från (1) till(2) stryks termen *3x* i bägge led och termen +1 i högerledet övergår till -1 i vänsterledet för att få bråkuttrycket ensamt i högerledet.
$$(2) \qquad -1 = \frac{x-1}{x-a}$$	Observera övergången från (3) till (4) där teckenväxlingen som orsakas av faktorn (-1) tas om hand.
$$(3) \qquad (-1)(x-a) = x-1$$	Resterande steg är rutinmässiga.
$$(4) \qquad a-x = x-1$$	
$$(5) \qquad a+1 = 2x$$	Noggrannare undersökning visar att ekvationen saknar lösning då *a*= ± 1, men vi går inte in närmare på detta.
$$(6) \qquad x = \frac{a+1}{2}.$$	

Övning 1

Sätt följande uttryck på ett gemensamt bråkstreck:

(a) $$\frac{2x}{3x+2} - \frac{4}{x+1}$$

(b) $$\frac{2+\frac{1}{x}}{x+3} - \frac{5}{x}$$

(c) $$\frac{3}{(x-2)^2} + \frac{2}{x^2-4}$$

(d) $$\frac{a+2b}{1+\frac{1}{cx-1}} + \frac{2a+b}{1-\frac{1}{cx+1}}$$

Observera att i **(c)** fungerar inte den vanliga korsmultipliceringen eftersom nämnarna innehåller en gemensam faktor. (Jfr Exempel 2.)
För att upptäcka detta måste man först faktorisera högra nämnaren.

I **(d)** måste man behärska multipla bråkstreck.

Huvudregeln är att $\frac{A}{B/C} = \frac{AC}{B}$, där huvudbråkstrecket har skrivits vågrätt.

Övning 2

Lös följande ekvationer med avseende på *x*:

(a) $$\frac{2}{x+a} + \frac{3}{x-1} = 0$$

(b) $$\frac{x}{x+2a} + \frac{2}{x-3} = 1$$

(c) $$\frac{1}{a+\frac{1}{x+b}} = 2$$

(d) $$(x+b)^2 + 2x = (x-c)^2$$

Dessa uppgifter är konstruerade så att eventuella x^2-termer alltid försvinner och den återstående ekvationen blir av första graden.

Du behöver här inte undersöka om lösningarna existerar för alla värden på de ingående parametrarna.

Övning 1. Lösningar.

Övning 1a, lösning .

$$\frac{2x}{3x+2} - \frac{4}{x+1} =$$

$$\frac{2x(x+1) - 4(3x+2)}{(3x+2)(x+1)} =$$

$$\frac{2x^2 + 2x - 12x - 8}{6x^2 + 3x + 2x + 2} =$$

$$\frac{2x^2 - 10x - 8}{6x^2 + 5x + 2}$$

Det är en smaksak om man skall svara med nämnaren i faktoriserad form eller inte.
Det går bra vilket som.

Övning 1b, lösning .	
$\dfrac{2+\frac{1}{x}}{x+3}-\dfrac{5}{x} \quad =$	
$\dfrac{x(2+\frac{1}{x})-5(x+3)}{(x+3)x} \quad =$	
$\dfrac{2x+1-5x-15}{x^2+3x} \quad =$	Observera tecknet framför 15 i täljaren.
$\dfrac{-3x-14}{x^2+3x} \quad =$	
$-\dfrac{3x+14}{x^2+3x}$	Observera minustecknet framför bråket i svaret.

Övning 1c, lösning .	
$$\frac{3}{(x-2)^2}+\frac{2}{x^2-4} \quad =$$	Lägg märke till att det finns en gemensam faktor i nämnarna.
$$\frac{3}{(x-2)^2}+\frac{2}{(x+2)(x-2)} \quad =$$	Den minsta gemensamma nämnaren erhålls därför inte genom vanlig korsmultiplicering.
$$\frac{3(x+2)+2(x-2)}{(x-2)^2(x+2)} \quad =$$	Den blir i stället $(x-2)^2\,(x+2)$.
$$\frac{3x+6+2x-4}{(x-2)^2(x+2)} \quad =$$	
$$\frac{5x+2}{(x-2)^2(x+2)}$$	Nämnaren skrivs här enklast i faktoriserad form.

Övning 1d, lösning . $$\frac{a+2b}{1+\frac{1}{cx-1}}+\frac{2a+b}{1-\frac{1}{cx+1}} =$$ $$\frac{a+2b}{\left(\frac{cx-1+1}{cx-1}\right)}+\frac{2a+b}{\left(\frac{cx+1-1}{cx+1}\right)} =$$ $$\frac{(a+2b)(cx-1)}{cx}+\frac{(2a+b)(cx+1)}{cx} =$$ $$\frac{acx-a+2bx-2b+2acx+2a+bcx+b}{cx} =$$ $$\frac{3cx(a+b)+a-b}{cx}$$	Nämnarna i undre bråken flyttas upp ovanför huvudbråkstrecket. Efter division får man det enklare svaret: $3(a+b)+\frac{a-b}{cx}$

Övning 2. Lösningar.

Övning 2a, lösning .

$$\frac{2}{x+a}+\frac{3}{x-1} = 0$$

Här behöver man inte sätta vänsterledet på gemensamt bråkstreck. Det är enklare att flytta över ett bråk till högerledet för att sedan bli av med bråkstrecken.

$$\frac{2}{x+a} = -\frac{3}{x-1}$$

$$2(x-1) = -3(x+a)$$

Samla alla x-termer i vänsterledet och alla konstanttermer i högerledet.

$$2x+3x = 2-3a$$

$$5x = 2-3a$$

$$x = \frac{2-3a}{5}$$

Övning 2b, lösning .

$\dfrac{x}{x+2a} + \dfrac{2}{x-3}$	$=1$	Här bör man sätta vänsterledet på gemensamt bråkstreck.
$\dfrac{x(x-3)+2(x+2a)}{(x+2a)(x-3)}$	$= 1$	
$x(x-3)+2(x+2a)$	$= (x+2a)(x-3)$	
$x^2-3x+2x+4a$	$= x^2-3x+2ax-6a$	x^2 - $3x$ kan nu strykas i bägge leden.
$2x-2ax$	$= -4a-6a$	
$x(2-2a)$	$= -10a$	Observera hanteringen av tecknen i svaret.
$x = \dfrac{-10a}{2-2a}$	$= \underline{\dfrac{5a}{a-1}}$	

Övning 2c, lösning .

$$\frac{1}{a+\frac{1}{x+b}} = 2$$

$$1 = 2(a+\tfrac{1}{x+b})$$

$$1 = 2(\frac{a(x+b)+1}{x+b})$$

$$x+b = 2a(x+b)+2$$

$$x(1-2a) = 2ab+2-b$$

$$x = \frac{2ab+2-b}{1-2a} = \underline{-b+\frac{2}{1-2a}}$$

Ett bra sätt att få ned antalet bråkstreck är att flytta nämnaren i ena ledet till täljaren i det andra.

Nu måste man dock sätta högerledet på gemensamt bråkstreck.

Observera: *2ab - b = -b(1 - 2a)*.

Övning 2d, lösning .

$$(x+b)^2+2x = (x-c)^2$$

$$x^2+2bx+b^2+2x = x^2-2cx+c^2$$

$$2bx+2x+2cx = c^2-b^2$$

$$2x(b+c+1) = c^2-b^2$$

$$x = \frac{c^2-b^2}{2(1+b+c)}$$

Här ser det ut som en andragradsekvation, men x^2-termerna går som synes bort.

Översikt 1

Bråkstreck

- **Gemensamt bråkstreck.** Två fall:
  - Ingen gemensam faktor i nämnarna (Ex: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3+2}{2\cdot 3}$)

$$\frac{a}{A}+\frac{b}{B}=\frac{aB+bA}{AB}$$

Se Exempel 1

  - Gemensam faktor i nämnarna (Ex: $\frac{1}{2\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 2}=\frac{3+2}{2\cdot 2\cdot 3}$)

$$\frac{a}{AC}+\frac{b}{BC}=\frac{aB+bA}{ABC}$$

Se Exempel 2

- **Huvudbråkstreck.** Två fall: $\frac{A}{B/C}=\frac{AC}{B}$, Se Övning 1d , och $\frac{A/B}{C}=\frac{A}{BC}$

Ekvationslösning

- Observera följande **skillnad** mellan ekvationslösning utan resp. med **parametrar**:

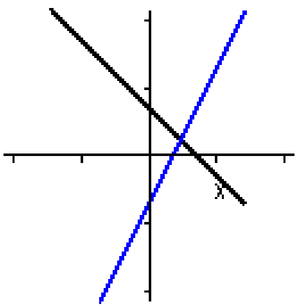
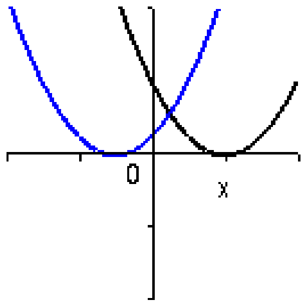
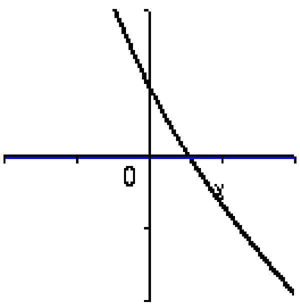
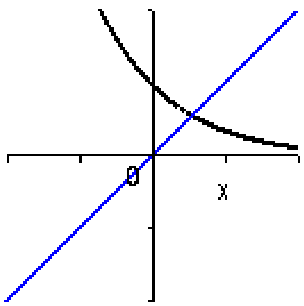
$$\begin{array}{rl|rl} 2x+3x & =5 & ax+bx & =c \\ 5x & =5 & x(a+b) & =c \\ x & =1 & x & =\frac{c}{a+b} \end{array}$$

I det senare fallet behöver man alltså införa en parentes och **bryta ut** variabeln *x* för att komma vidare.
Se Exempel 3

- **Bråkstreckshantering i ekvationer:** Ibland är det gynnsamt att sätta uttryck på gemensamt bråkstreck i ekvationer och ibland inte.
  Övning 2b är ett exempel på att gemensamt bråkstreck behövs, medan
  Övning 2a visar ett fall då detta inte behövs (p.g.a. nollan i högerledet).

Grafer

(Översikt 1 forts.)

 $y = ax + b$	 $y = (x\text{-}c)^2$	Parameteruttryck i *x* och *y* ska man se som en mängd av kurvor där parametervärdena påverkar kurvornas utseende. Till vänster står $y = ax + b$ för en mängd räta linjer där *a* anger linjens lutning. Två exempel är plottade (y=-$x + 1$ och $y=2x - 1$). Till höger ser man två representanter för parablerna som kan skrivas $y = (x\text{-}c)^2$. ($y=(x+0.5)^2$ och $y=(x\text{-}1)^2$). Här anger *c* läget på *x*-axeln för parablernas minimipunkter.
 $y = e^{-x} - x$	 $y = e^{-x}$, $y = x$	Exemplen visar hur en lösning till en ekvation kan representeras grafiskt på olika sätt. Till vänster ser man hur roten till ekvationen $y = e^{-x} - x = 0$ framträder som x-koordinaten för skärningspunkten mellan funktionsgrafen för $y = e^{-x} - x$ och *x*-axeln. Till höger har graferna för $y = e^{-x}$ och $y = x$ plottats och lösningen till samma ekvation återfinns som *x*-koordinaten för de två grafernas skärningspunkt.