Introduktion

Avsnitt 2 handlar om den enklaste typen av algebraiska uttryck, polynomen. Eftersom polynom i princip kan faktoriseras i första- och/eller andragradspolynom år det naturligt att starta med en grundlig undersökning av andragradspolynomen. Kvadratkomplettering är en viktig metod för att studera sådana polynom.
Ex: $x^2 + 2ax + 3b = (x+a)^2 - a^2 + 3b$, .
En kvadratkomplettering ger information om polynomets nollställen och om var maxvärdet eller minvärdet ligger. Man får också indirekt formeln för lösningarna till en andragradsekvation ur kvadratkompletteringen, som kan vara bra att komma ihåg:

$\boxed{x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}$ ger rötterna till ekvationen $x^2 + px + q = 0$.

Utöver detta genomgås **polynomdivision**, som finns i ett antal olika metoder. Här visas en variant av 'liggande stolen' samt en direktversion för inte allt för omfattande divisioner.

En typisk tillämning av polynomdivision är då man har en tredjegradsekvation $P(x) = 0$ och finner genom insättning att $x=2$ är en av rötterna.
Man vet då att $(x-2)$ är en faktor i $P(x)$, dvs $P(x)=(x-2)Q(x)$, där $Q(x)$ måste vara ett andragradspolynom. Genom divisionen kan nu $Q(x)$ råknas ut som $P(x)/(x-2)$.
Slutligen löser man andragradsekvationen $Q(x) = 0$ och lösningen är fullständig.
Målsättning:

Efter studium av Avsnitt 2 skall du kunna:

- kvadratkomplettera ett andragradspolynom och dra slutsatser angående polynomets nollställen.
- utföra polynomdivision med någon metod.
- tillämpa polynomdivision för att lösa högre ordningens ekvationer då någon rot är känd.

Exempel 1

Kvadratkomplettera: $$\begin{aligned} 3x^2+5x-7 &= \\ 3(x^2+(5/3)x-7/3) &= \\ 3((x+5/6)^2-25/36-7/3) &= \\ 3((x+5/6)^2-109/36). \end{aligned}$$	Bryt först ut koefficienten för x^2, här 3. x-termen $(5/3)x$ skall nu vara den blivande kvadratens dubbla produkt. Därför blir kvadraten $(x + 5/6)^2$. Slutligen måste man dra ifrån $(5/6)^2$ och förenkla konstanttermen för att det hela skall stämma.

Exempel 2

Kvadratkomplettera: $$\begin{aligned} 4x^2+6ax+3a^2 &= \\ 4(x^2+(3a/2)x+3a^2/4) &= \\ 4((x+3a/4)^2-9a^2/16+3a^2/4) &= \\ 4((x+3a/4)^2+3a^2/16). \end{aligned}$$	Bryt ut x^2-koefficienten 4. Identifiera dubbla produkten, $3a/2$, och bilda kvadraten, $(x + 3a/4)^2$. Slutligen dras kvadraten $(3a/4)^2$ ifrån och uttrycket snyggas till. Observera förekomsten av parametern a, som dock inte förändrar principen.

Exempel 3

Kvadratkomplettera: $$\begin{aligned} px^2 + 4qx + A &= \\ p(x^2 + (4q/p)x + A/p) &= \\ p((x + 2q/p)^2 - (4q^2)/p^2 + A/p). \end{aligned}$$	Samma procedur som förut, trots tre parametrar: *p* bryts ut, *(4q/p)x* är dubbel produkt. Kvadraten blir $(x + 2q/p)^2$ Konstanttermen snyggas till så gott det går.

Exempel 4

Utför följande polynomdivision: $$\begin{aligned} \frac{x^3+1}{x^2+2} &= \\ \frac{x^3+2x-2x+1}{x^2+2} &= \\ \frac{x(x^2+2)-2x+1}{x^2+2} &= \\ x + \frac{-2x+1}{x^2+2} &. \end{aligned}$$	Här visas **direktdivision** av polynom, där alla beräkningar utförs i anslutning till det givna bråkstrecket. En annan metod som svarar mot '**liggande stolen**' för numerisk division visas i avsnittets SfS-exempel. Metoden här bygger på att man i täljaren skapar en multipel av nämnaren. Där skall täljarens högstagradsterm ingå (här x^3). Man ser att $x^3 + 2x$ behövs för att skapa en multipel av $x^2 + 2$. Därför lägger man till och drar ifrån $2x$ i täljaren. Efter dessa förberedelser är det bara att skriva ut resultatet. Notera att $(x^2 + 2)$ förkortas bort så att kvoten x erhålles. Man är färdig då den erhållna resten, här $-2x + 1$, har lägre gradtal än nämnaren.

Övning 1

Kvadratkomplettera följande andragradsuttryck.

$$(a) \qquad 2x^2 + 3x + 2$$

$$(b) \qquad 2x^2 + 3ax + 4$$

$$(c) \qquad 3x^2 + ax + 6b$$

$$(d) \qquad ax^2 + 3bx + 2c$$

Dessa uppgifter löses på samma sätt som exemplen.

Man bryter lämpligen först ut koefficienten för x^2-termen.

Övning 2

Utför följande polynomdivisioner:

$$(a) \quad \frac{2x^3+6x+5}{x^2+2x+2}$$

$$(b) \quad \frac{3x^3+2x^2+x+11}{x^2+4x+5}$$

$$(c) \quad \frac{2x^3+9x^2+3x+17}{x+7}$$

$$(d) \quad \frac{x^3+5x^2-2x-13}{x-3}$$

Dessa divisioner kan utföras med valfri metod.

I lösningarna visas **direktdivision**.

För lösningsmetoden **liggande stolen** hänvisas till SfS-exemplen

Övning 1. Lösningar.

Övning 1a, lösning .

$$2x^2+3x+2 =$$

$$2(x^2+(3/2)x+1) =$$

$$2((x+3/4)^2-9/16+1) =$$

$$2((x+3/4)^2+7/16) .$$

Det är en smaksak om man skall svara med tvåan utbruten ur parentesen eller inmultiplicerad.
Det går bra vilket som.

Övning 1b, lösning .

$$2x^2+3ax+4 =$$

$$2(x^2+(3a/2)x+2) =$$

$$2((x+3a/4)^2-9a^2/16+2) =$$

$$2((x+3a/4)^2+2-9a^2/16) .$$

Observera att lösningsmetoden är densamma trots förekomsten av parametern a.

Övning 1c, lösning .	
$3x^2 + ax + 6b \quad =$	
$3(x^2 + (a/3)x + 2b) \quad =$	
$3((x + a/6)^2 - a^2/36 + 2b) \quad =$	
$3((x + a/6)^2 + 2b - a^2/36) \quad .$	På grund av parametrarna går det inte att förenkla uttrycket mer än så här.

Övning 1d, lösning .	
$ax^2 + 3bx + 2c \quad =$ $(a \neq 0 \text{ antages})$	Observera villkoret a skilt från 0, som man måste införa för att kunna dividera med a.
$a(x^2 + (3b/a)x + 2c/a) \quad =$	
$a((x + \frac{3b}{2a})^2 - \frac{9b^2}{4a^2} + \frac{2c}{a}) \quad =$	
$a((x + \frac{3b}{2a})^2 + \frac{8ac-9b^2}{4a^2}) \quad .$	Här har konstanttermen satts på gemensamt bråkstreck, vilket dock inte är nödvändigt.

Övning 2. Lösningar.

Övning 2a, lösning .

$$\frac{2x^3+6x+5}{x^2+2x+2} =$$

$$\frac{2x^3+4x^2+4x-4x^2-4x+6x+5}{x^2+2x+2} =$$

Observera att divisionen här sker i två steg:

$$\frac{2x(x^2+2x+2)-4x^2+2x+5}{x^2+2x+2} =$$

Först bildar man $2x^3 + 4x^2 + 4x$ i täljaren för att kunna dividera ut $2x$.

$$2x+\frac{-4x^2-8x-8+8x+8+2x+5}{x^2+2x+2} =$$

Därefter bildar man $-4x^2 - 8x -8$ för att kunna dividera ut -4.

$$2x+\frac{-4(x^2+2x+2)+10x+13}{x^2+2x+2} =$$

$$2x-4+\frac{10x+13}{x^2+2x+2} .$$

Övning 2b, lösning .	
$$\frac{3x^3+2x^2+x+11}{x^2+4x+5} =$$ $$\frac{3x^3+12x^2+15x-12x^2-15x+2x^2+x+11}{x^2+4x+5} =$$ $$\frac{3x(x^2+4x+5)-10x^2-14x+11}{x^2+4x+5} =$$ $$3x+\frac{-10x^2-40x-50+40x+50-14x+11}{x^2+4x+5} =$$ $$3x+\frac{-10(x^2+4x+5)+26x+61}{x^2+4x+5} =$$ $$3x-10+\frac{26x+61}{x^2+4x+5} .$$	Exakt samma typ av lösning som i 2a.

Övning 2c, lösning .	
$\dfrac{2x^3+9x^2+3x+17}{x+7} =$	
$\dfrac{2x^3+14x^2-14x^2+9x2+3x+17}{x+7} =$	
$2x^2+\dfrac{-5x^2+3x+17}{x+7} =$	Här har inte utbrytnigen av en restterm ur en parentes redovisats utan detta steg anses välbekant från 2a-b.
$2x^2+\dfrac{-5x^2-35x+35x+3x+17}{x+7} =$	
$2x^2-5x+\dfrac{38x+17}{x+7} =$	
$2x^2-5x+\dfrac{38x+266-266+17}{x+7} =$	Eftersom nämnaren här är av första graden måste divisionen drivas längre i denna övning än i 2a och 2b.
$2x^2-5x+38-\dfrac{249}{x+7}$	Man fortsätter alltså tills resten blir en konstant, i det här fallet -249.

Övning 2d, lösning .	Exakt samma typ av lösning som i 2c.

$$\frac{x^3+5x^2-2x-13}{x-3} =$$

$$\frac{x^3-3x^2+3x^2+5x2-2x-13}{x-3} =$$

$$x^2+\frac{8x^2-2x-13}{x-3} =$$

$$x^2+\frac{8x^2-24x+24x-2x-13}{x-3} =$$

$$x^2+8x+\frac{22x-13}{x-3} =$$

$$x^2+8x+\frac{22x-66+66-13}{x-3} =$$

$$x^2+8x+22+\frac{53}{x-3}$$

Översikt 2

Kvadratkomplettering

Det här är en viktig teknik som måste tränas in. Poängen med kvadratkomplettering är att man direkt kan se om andragradsfunktionen har några nollställen samt också var funktionens maximum eller minimum ligger.

Ex1: $P_1(x) = x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 + 2$.
Ex2: $P_2(x) = x^2 + 6x + 7 = (x+3)^2 - 2$.

I den färdiga kvadratkompletteringen finns två termer, kvadrattermen och konstanttermen.
Följande information framkommer om P_1 och P_2:
$P_1(x)$ har inget 0-ställe eftersom konstanttermen = 2 > 0.
$P_1(x)$ har ett minimum som antas för x=-1. (Detta följer av kvadrattermens utseende.)
Minimivärdet är 2 = konstanttermen.

$P_2(x)$ har två 0-ställen eftersom konstanttermen = -2 < 0.
$P_2(x)$ har ett minimum som antas för x=-3. Minimivärdet är -2.

Polynomdivision.

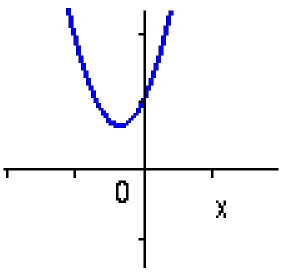
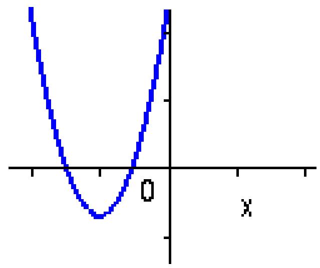
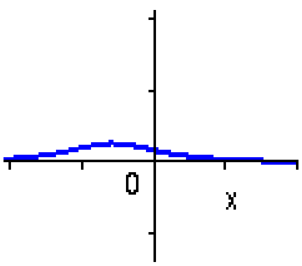
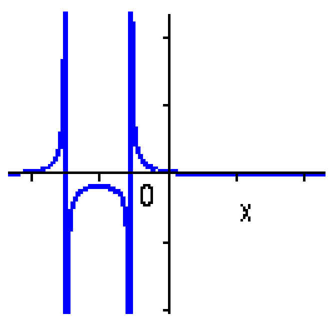
Två tekniker gås igenom här:

- **Direktdivision** (se lösningarna till Övning 2.)
- **Liggande stolen** (se SfS-exemplet)

Den senar lämpar sig för litet större divisioner.
Båda är bra att kunna.
Behärskar man polynomdivision kan man lösa högre ekvationer bara man känner till en eller flera rötter. Om x=a är en rot till polynomekvationen P(x) = 0, är (x-a) en faktor i P(x). Genom division får man P(x) = (x-a)Q(x) och nya rötter kan eventuellt erhållas från ekvationen Q(x) = 0 som har lägre grad.

Denna typ av problem förekommer i avsnittets sluttest.

Grafer

 $y = P_1(x) = (x+1)^2+2$	 $y = P_2(x) = (x+3)^2-2$	Här till vänster visas graferna av de två andragradsfunktionerna $P_1(x)$ och $P_2(x)$ som förekommer i Ex1 och Ex2 ovan. Båda har minimum för x = -1 resp. x=-3, men endast den högra har nollställen, eftersom dess minimum är negativt.
 $y = 1/P_1(x) = 1/((x+1)^2+2)$	 $y = 1/P_2(x) = 1/((x+3)^2-2)$	Här visas de båda andragradsfunktionerna i inverterad form, $1/P_1(x)$ resp. $1/P_2(x)$. Man ser vilken dramatisk inverkan förekomsten av nollställen har på de inverterade funktionerna.

Avdelning Matematik