Introduktion

Avsnitt 3 handlar om problemet att avgöra hur en given funktions värden växlar tecken.

Här studera speciellt rationella funktioner, dvs kvoter av polynom, ex: $\boxed{\dfrac{x^2+x-2}{x^3+x}}$.

När den rationella funktionen är faktoriserad, som: $\boxed{\dfrac{(x-1)(x+2)}{x(x^2+1)}}$
är det särskilt enkelt att studera tecknet eftersom man kan göra detta för varje faktor för sig och sedan sammanställa resultatet. Detta bör man göra på något systematiskt sätt, exempelvis med den tabellmetod som redovisas i avsnittet.

I det fall det förekommer rottecken utanför en rationell funktion, blir denna undersökning särskilt intressant eftersom ju rotuttryck inte är definierade då uttrycket under rottecknet är negativt.

Om man vill veta för vilka *x* funktionen $\boxed{\sqrt{\dfrac{(x-1)(x+2)}{x(x^2+1)}}}$ är definierat måste man alltså utföra teckenstudium enligt ovan på den rationella funktionen under rottecknet.

Målsättning:

Efter studium av Avsnitt 3 skall du kunna:

- utföra teckenstudium på en faktoriserad rationell funktion.
- med hjälp av kunskaper från Avsnitt 1 och 2 överföra en ickefaktoriserad rationell funktion till faktoriserad form för att därefter utföra teckenstudium.
- dra slutsatser om existensområdet för kvadratroten ur en rationell funktion.

Exempel 1

Problem:

Bestäm definitionsmängden för

$$F(x) = \sqrt{\frac{x^2 - x - 6}{x^2 + 2x - 3}}.$$

Sätt

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x^2 + 2x - 3}$$

Lösning av andragradsekvationerna $x^2 - x - 6 = 0$ och $x^2 + 2x - 3 = 0$ ger rötterna -2 och 3 resp. 1 och -3 vilket ger faktoriseringen:

$$f(x) = \frac{(x+2)(x-3)}{(x-1)(x+3)}$$

Vi studerar nu teckenväxlingen för $f(x)$ i följande tabell:

För att fastställa definitionsmängden för en funktion som innehåller ett rotuttryck måste man alltså studera uttrycket under rottecknet. Detta uttryck måste vara definierat och får inte vara < 0.

Därför studeras här funktionen *f(x)*

Ett teckenstudium inleds bäst med att man faktoriserar i den mån detta är möjligt.

Observera hur kännedomen om polynomens nollställen leder till de sökta faktoriseringarna.

Teckentabell (Exempel 1 forts.) :

		-3		-2		1		3	
x + 3	-	0	+		+		+		+
x + 2	-		-	0	+		+		+
x - 1	-		-		-	0	+		+
x - 3	-		-		-		-	0	+
f(x)	+	ej def	-	0	+	ej def	-	0	+

Här visas ett sätt att utföra teckenstudium i tabellform. Notera att varannan kolumn svarar mot ett fixt *x*-värde, ett nollställe till en av faktorerna.
Och varannan kolumn svarar mot ett **helt intervall** mellan två sådana nollställen. (Även de obegränsade intervallen till vänster om minsta nollstället resp. till höger om största nollstället skall vara med.)
I dessa kolumner för man in tecknet (+ eller -) för varje faktor.

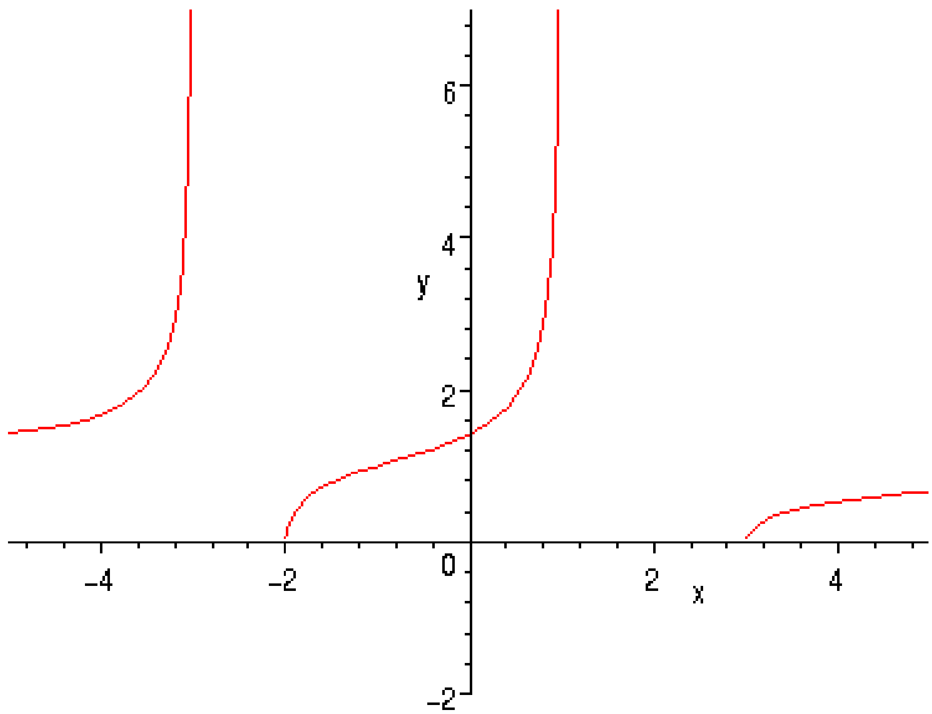
Slutsats:

$F(x)$ är definierad då $f(x)$ existerar och är ≥ 0, dvs då :

$$x < -3, \quad -2 \leq x < 1 \quad \text{och} \quad 3 \leq x.$$

Här dras slutsatserna som följer av tabellens nedersta rad, där tecknet för hela funktionen fylls i enligt regeln:
Jämnt antal minustecken ger plus.
Udda antal minustecken ger minus
Notera att när nämnaren är 0 blir funktionen icke definierad (ej def.)

Rotfunktionens graf (Exempel 1 forts.):



$$y = \sqrt{\frac{(x+2)(x-3)}{(x-1)(x+3)}}$$

Kontrollera att grafen existerar för precis de *x*-värden som slutsatsen angav!

Notera också att de två *x*-värden för vilka funktionen inte existerar (-3 resp. 1) svarar mot lodräta asymptoter, dvs funktionsvärdena växer obegränsat då *x* närmar sig dessa värden.

Övning 1

Bestäm definitionsmängden för följande kvadratrotsfunktioner:

$$(a) \qquad \sqrt{\frac{x^2 - 2x - 15}{x^2 - 1}}$$

$$(b) \qquad \sqrt{\frac{2x^2 - 5x - 12}{x + 1}}$$

$$(c) \qquad \sqrt{\frac{x^2 - 8x + 7}{x^2 + 2x + 2}}$$

Dessa uppgifter löses på samma sätt som i Exempel 1.

Man studerar alltså den rationella funktionen under rottecknet och börjar med att faktorisera..

Övning 2

Bestäm definitionsmängden för följande funktioner:

$$(a) \qquad \sqrt{x^2 - 3x + \frac{7 - x^3}{x - 1}}$$

$$(b) \qquad \sqrt{x - 3} \cdot \sqrt{\frac{x - 5}{x - 1}}$$

$$(c) \qquad \ln\left(12 + x - x^2\right)$$

I (a) behöver man sätta uttrycket under rottecknet på gemensamt bråkstreck innan man faktoriserar.

I (b) förekommer **två** rotuttryck, vilket man måste ta hänsyn till när man bestämmer definitionsmängden för hela funktionen.

I (c) förväntas man känna till att en funktion av typ ln(h(x)) är definierad endast då h(x) > 0.

Övning 1. Lösningar.

Övning 1a, lösning .

Definitionsmängden för

$\sqrt{\dfrac{x^2-2x-15}{x^2-1}}$ skall bestämmas.

Faktorisering av $f(x)=\dfrac{x^2-2x-15}{x^2-1}$ ger:

$$f(x)=\frac{(x+3)x-5)}{(x+1)(x-1)}$$

som studeras i en teckentabell:

Lösningen följer mönstret från Exempel 1.

Man undersöker alltså för vilka x funktionen under rottecknet antar ickenegativa värden.

Faktoriseringen tillgår så att nollställena för täljaren och nämnaren bestäms genom lösning av motsvarande andragradsekvationer. Dessa räkningar redovisas inte här.

Teckentabell (Lösning Ovning 1a, forts.)	De punkter där nämnaren är noll utesluts ur definitionsmängden ("ej. def" i tabellen).

		-3		-1		1		5	
$x+3$	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$
$x+1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-5$	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$+$	0	$-$	ej def.	$+$	ej def.	$-$	0	$+$

Slutsats Definitionsmängden är: $x \leq -3 \quad , \quad -1 < x < 1 \quad , \quad 5 \leq x$	Definitionsmängden i slutsatsen definieras av de olikheter som x skall uppfylla för att ligga i mängden, Observera användningen av strikta och ickestrikta olikheter.

Övning 1b, lösning . Definitionsmängden för $\sqrt{\dfrac{2x^2-5x-12}{x+1}}$ skall bestämmas. Faktorisering av $g(x)=\dfrac{2x^2-5x-12}{x+1}$ ger: $g(x)=\dfrac{2(x+3/2)(x-4)}{x+1}$ som studeras i en teckentabell:	Observera tvåan som lämpligen bryts ut ur polynomet i täljaren i samband med faktoriseringen. Den påverkar inte tecknen i teckentabellen. Hade däremot x^2 haft en negativ koefficient hade tecknen fått kastas om.

Teckentabell

(Lösning Övning 1b, forts.)

		$-3/2$		-1		4	
$x+3/2$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x+1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-4$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$g(x)$	$-$	0	$+$	ej def.	$-$	0	$+$

Talet x=-1 är inte med i definitionsmängden eftersom det är ett nollställe till nämnaren. Därför är g(x) inte definierad för x=-1. (Man får ju inte dividera med 0).

Slutsats

Definitionsmängden är:

$$-3/2 \leq x < -1 \quad , \quad 4 \leq x$$

Övning 1c, lösning . Definitionsmängden för $\sqrt{\dfrac{x^2-8x+7}{x^2+2x+2}}$ skall bestämmas. Faktorisering av $h(x) = \dfrac{x^2-8x+7}{x^2+2x+2}$ ger: $h(x) = \dfrac{(x-7)(x-1)}{(x+1)^2+1}$ Kvadratkompletteringen av nämnaren visar att denna är positiv för alla x. $h(x)$ studeras i en teckentabell:	Lägg märke till att nämnaren här inte har några nollställen och är > 0 för alla x. Detta visas här genom kvadratkomplettering. Detta hade också visat sig vid ett försök att lösa motsvarande andragradsekvation. Man hade fått ett negativt tal under rotteckneet.

Teckentabell

(Övning 1c, lösning, forts.)

		1		7	
$x-1$	$-$	0	$+$		$+$
$x-7$	$-$		$-$	0	$+$
$h(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Slutsats

Definitionsmängden är:

$$x \leq 1 \quad , \quad 7 \leq x$$

Övning 2. Lösningar.

Övning 2a, lösning .

Definitionsmängden för

$$\sqrt{x^2 - 3x + \frac{7 - x^3}{x - 1}}$$ skall bestämmas.

Faktorisering av $f(x) = x^2 - 3x + \dfrac{7 - x^3}{x - 1}$ ger:

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 - x^2 + 3x + 7 - x^3}{x - 1} =$$

$$\frac{-4x^2 + 3x + 7}{x - 1} = \frac{(-4)(x + 1)(x - 7/4)}{x - 1}$$

Teckenstudium av $f(x)$ på vanligt sätt ger
slutsatsen:
$x \leq -1 \quad , \quad 1 < x \leq 7/4.$

Det väsentliga här är att man lyckas faktorisera korrekt.

Då fordras att man sätter uttrycket på gemensamt bråkstreck.

Teckenstudium av de faktoriserade funktionerna redovisas inte i lösningarna till Övning 2.

Där hänvisas till Exempel 1, SfS-exemplet och lösningarna till Övning 1.

Övning 2b, lösning . Definitionsmängden för $\sqrt{x-3}\cdot\sqrt{\dfrac{x-5}{x-1}}$ skall bestämmas. Faktorn $\sqrt{x-3}$ har existensområdet: $3 \leq x$. Faktorn $\sqrt{\dfrac{x-5}{x-1}}$ har existensområdet: $x < -1 \quad , \quad 5 \leq x.$ Funktionens definitionsmängd består därför av de x-värden som tillhör **båda** faktorernas existensområden, dvs **slutsats**: $5 \leq x.$	Här finns alltså två rotuttryck. För att den totala produkten skall vara definierad fordras att båda ingående faktorerna skall vara definierade. Man undersöker alltså de båda faktorerna var för sig och bildar till slut den mängd som ligger i båda faktorernas existensområden. Man säger ibland att man bildar **skärningen** mellan de två mängderna. När man bildar skärningsmängder av intervall kan det underlätta om man ritar upp de ingående intervallen på samma tallinje. Begreppen definitionsmängd och existensområde har här samma betydelse.

Övning 2c, lösning .

Definitionsmängden för $\ln(12 + x - x^2)$ skall bestämmas. Vi söker alltså de x som uppfyller $12 + x - x^2 > 0$ Faktorisering ger $12 + x - x^2 = (-1)(x^2 - x - 12) =$ $(-1)(x+3)(x-4)$. Detta uttryck är > 0 för $\underline{-3 < x < 4}$, vilket alltså definierar den sökta definitionsmängden.	Det nya inslaget här är att man skall känna till definitionsmängden för ln-funktionen. Liksom för alla logaritmfunktioner krävs att **argumentet**, dvs h i uttrycket ln(h) , skall vara > 0. Observera att faktorn (-1) här påverkar tecknet.

Översikt 3

Teckenstudium

Här tränas teckenstudium av polynom och rationella funktioner (som är kvoter av polynom). Metoden går ut på att man **faktoriserar** funktionen så långt som möjligt och därefter systematiskt studerar funktionens tecken genom att sammanställa faktorernas tecken i en tabell. (Se Exempel 1 och SfS-exemplet.)

Observera särskilt de kolumner som svarar mot **intervall**.
man kan alltså studera funktionens tecken **för alla x** i olika intervall.
Detta gör dessa teckentabeller klart överlägsna de punkttabeller som man ibland kan göra som stöd för en grafskissering:

x	y
−1	3
0	7
1	4
2	1
4	−3

Här kan man ju inte uttala sig om hur funktionen uppför sig mellan punkterna.

En del av problemet består i att utföra faktoriseringen.
Man måste kunna sätta funktionen på gemensamt bråkstreck och faktorisera m.hj.a polyniomdivision om något av detta behövs.

En vanlig tillämpning är att fastställa derivatans tecken i samband med kurvundersökningar.

Definitionsmängder

(Översikt 3 forts.)

Teckenstudium är också ett viktigt inslag i hanteringen av funktioner med begränsad definitionsmängd. De funktioner av denna typ man först brukar stöta på är kvadratroten och logaritmerna. Följande inskränkningar gäller:

$$\boxed{\sqrt{x} \text{ är definierad endast då } x \geq 0}$$

$$\boxed{\ln x \text{ är definierad endast då } x > 0}$$

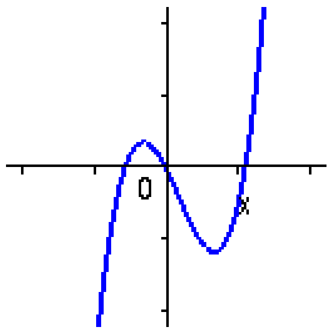
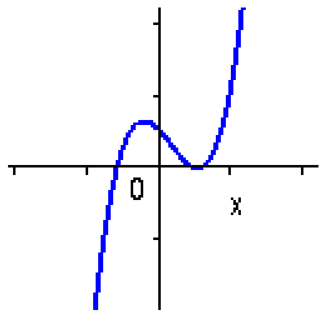
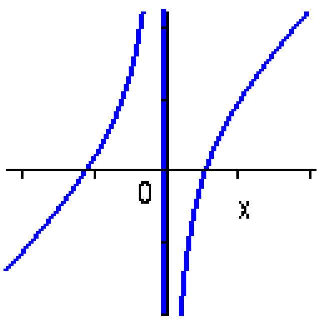
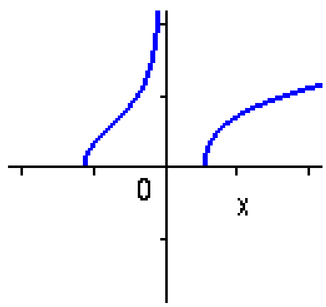
och man får ju inte heller glömma:

$$\boxed{\frac{1}{x} \text{ är definierad endast då } x \neq 0}$$

En del av problemen i detta avsnitt är formulerade som bestämningar av definitionsmängder. Men det handlar alltså egentligen om vanligt teckenstudium av rationella funktioner.

Grafer

(Översikt 3 forts.)

 $y = x(x+1)(x-2)$	 $y = (x+1)(x-1)^2$	Till vänster visas grafen av ett tredjegradspolynom på faktoriserad form, vilket gör det möjligt att avläsa nollställenas läge. Kontrollera att varje faktor av typ (x-a) svarar mot nollstället x=a! Till höger visas grafen av ett tredjegradspolynom med en kvadratisk faktor $(x-1)^2$. Detta svarar mot arr x=1 är ett dubbelt nollställe till polynomet. Man ser också att funktionsvärdena är > 0 på båda sidor av x=1, vilket är typiskt för kvadratiska faktorer. I teckentabellen hade man fått kombinationen ' + 0 + ' omkring x=1.
 $y = r(x) = (x-1)(x+2)/x$	 y = kvadratroten ur r(x),	Till vänster visas grafen av en typisk rationell funktion, r(x), som växlar tecken i x=-2, 0 och 1. I x=0 finns dessutom en lodrät asymptot på grund av nämnarens nollställe x=0. Till höger visas kvadratroten ur samma funktion. Man ser att denna funktions definitionsmängd endast omfattar de x för vilka r(x) inte är < 0.