Introduktion

Avsnitt 4 handlar om en viss typ av ekvationer där man skall vara försiktig med de lösningar som man får med normala lösningsmetoder. Det kan nämligen hända att det under lösningen gång har smugit sig in falska rötter.
I de fall man måste kvadrera bägge led för att kunna gå vidare inser man att falska rötter kan uppträda: $a=-3$ är ju skilt från $b=3$, men efter kvadrering får vi likheten $(-3)^2=3^2$, dvs $a^2=b^2$.
Kvadrering förekommer ofta då ekvationen innehåller kvadratrötter, eftersom man normalt behöver bli av med kvadrarotstecknen innan ekvationen kan lösas.

En anna effekt illustreras av exemplet
(1) $ln(3-x^2) = ln(x-3)$.
För att gå vidare här övergår man till
(2) $3-x^2 = x-3$

(2) visar sig ha lösningarna x=2 och x=-3. Men ekvation (1) är varken definierad för x=2 eller x=-3.
Insättning i (1) ger nämligen ln(-1) i bägge leden för x=2 och ln(-6) för x=-3. Men dessa lösningar måste slopas eftersom varken ln(-1) eller ln(-6) är definierade. Funktionen lnx är ju definierad endast för x>0. Det som har hänt här är att p.g.a. ln:s restriktion för existensområdena så förändras (utökas) dessa för de ingående funktionerna vid övergången från (1) till (2).
Därför måste de erhållna lösningarna prövas i ursprungsekvationen också i detta fall.
Målsättning:

Efter studium av Avsnitt 4 skall du kunna:

- lösa ekvationer som kräver kvadrering av bägge led.
- förstå varför de så erhållna rötterna måste prövas i ursprungsekvationen.
- förstå varför de erhållna lösningar måste prövas i de fall de ingående uttryckens existensområden har ändrats under lösningen gång.

Exempel 1

Lös följande ekvation:

$$(*) \qquad \sqrt{10-3x} = x-2$$

$$(1) \qquad 10-3x = (x-2)^2$$

$$(2) \qquad 10-3x = x^2-4x+4$$

$$(3) \qquad 0 = x^2-x-6$$

$$(4) \qquad x = 1/2 \pm \sqrt{1/4+6} = 1/2 \pm 5/2$$

$$(5) \qquad x_1 = -2, \quad x_2 = 3$$

Eftersom lösningen innehöll en kvadrering av bägge led måste de båda rötterna x_1 och x_2 **prövas** i den ursprungliga ekvationen (*):

$x_1 = -2$ ger $VL = \sqrt{16} = 4, \quad HL = -4,$ roten slopas.

$x_2 = 3$ ger $VL = \sqrt{1} = 1, \quad HL = 1,$ roten stämmer.

Svar: $x = 3$.

Här visas hur en falsk rot introduceras under lösningens gång.
I detta fall var det kvadreringen från (*) till (1) som var orsaken.

Beteckningarna 'VL' och 'HL' står för vänsterledet resp. högerledet.

Genom att pröva de erhållna rötterna i den ursprungliga ekvationen kan man alltid avslöja de falska rötterna.

Exemple 2

Lös följande ekvationer:	
$$\begin{array}{llll} (*) & \sqrt{x} = \sqrt{-x-2} & (**) & \sqrt{x} = -1 \\ (1) & x = -x - 2 & (1') & x = (-1)^2 \\ (2) & 2x = -2, & (2') & x = 1 \\ (3) & x = -1 & & \end{array}$$ **Prövning i (*):** x=-1 uppfyller inte (*) eftersom rotuttrycken i (*) inte är definierade för x=-1. (Man får negativa tal under rottecknet.) Roten slopas **Prövning i (**):** x=1 ger VL = 1 och HL = -1 i (**). Roten slopas. Båda ekvationerna saknar alltså rötter.	Här visas parallellt två ekvationer där falska rötter dyker upp. I (*) ligger den erhållna roten x=-1 utanför **definitionsområdet** för båda kvadratrotsfunktionerna i den ursprungliga ekvationen. I (**) orsakar **kvadreringen** av bägge led att x=1 uppfyller (1') men inte (**).

Exempel 3

Lös följande ekvation:	
(*) $\ln(x^2+x-3) = \ln(x+1)$ (1) $x^2+x-3 = x+1$ (2) $x^2-4=0$ (3) $x_1 = 2, \quad x_2 = -2$	Här är ekvationen av typ (*) ln A = ln B. Därifrån kan man gå till (1) A = B , om man på slutet prövar de erhållna rötterna.
Eftersom lösningen innehöll logaritmer som senare eliminerades måste de båda rötterna x_1 och x_2 **prövas** i den ursprungliga ekvationen (*): $x_1 = 2$ ger $VL = \ln 3 = HL$, roten stämmer. $x_2 = -2$ ger $VL = \ln(-1)$, $HL = \ln(-1)$, ej definierat, roten slopas. **Svar:** $x = 2$.	Ekvationen (*) kan nämligen innehålla restriktioner i definitionsområdena (ln A är ju definierat endast om A > 0.) Det är detta som händer här och som avslöjas av **prövningen**. då man råkar ut för det icke definierade uttrycket ln(-1).

Övning 1

Lös ekvationerna:

$$(a) \qquad \sqrt{19 - 2x} = x - 2$$

$$(b) \qquad \sqrt{31 - 6x} = x - 4$$

$$(c) \qquad \sqrt{13 - x} = x - 1$$

Dessa uppgifter löses på samma sätt som i Exempel 1 - 32

Man kvadrerar alltså båda led för att bli av med rottecknen.

De erhållna rötterna **prövas** därefter i ursprungsekvationen.

Övning 2

Lös ekvationerna:

$$(a) \qquad \sqrt{\frac{x^2 + x + 1}{3x}} = -1$$

$$(b) \qquad \ln(2x - 7) = \ln(x - 4)$$

$$(c) \qquad \ln(x^2 + x) = \ln(4x)$$

I de fall logaritmer förekommer i bägge led eliminerar man helt enkelt dessa och kontrollerar senare genom **prövning** att de erhållna rötterna ger definierade uttryck i ursprungsekvationen.

Kom ihåg:

ln A är definierat endast om
A > 0.

Övning 1. Lösningar.

Övning 1a, lösning .

Lösningen följer mönstret från Exempel 1.

$$(*) \qquad \sqrt{19-2x} = x-2$$

Kvadrera bägge led för att få bort rottecknet.

$$(1) \qquad 19-2x = x^2-4x+4$$

$$(2) \qquad x^2-2x-15=0$$

$$(3) \qquad x = 1 \pm \sqrt{1+15}$$

$$(3) \qquad x_1 = 5, \quad x_2 = -3$$

Lös den uppkomna andragradsekvationen.

Prövning:

$x_1 = 5$ i (*): $VL = \sqrt{9} = 3, \quad HL = 3,$ stämmer.

Pröva de båda rötterna i ursprungsekvationen.

$x_2 = -3$ i (*): $VL = \sqrt{25} = 5, \quad HL = -5,$ slopas.

VL betyder vänsterledet.
HL betyder högerledet.

Svar: $x = 5$.

Övning 1b, lösning .

(*) $\sqrt{31-6x} = x-4$

(1) $31-6x = x^2-8x+16$

(2) $x^2-2x-15=0$ samma ekvation som i Övn. 1a !

(3) $x_1 = 5, \quad x_2 = -3$

Prövning:

$x_1 = 5$ i (*): $VL = \sqrt{1} = 1, \quad HL = 1,$ stämmer.

$x_2 = -3$ i (*): $VL = \sqrt{49} = 7, \quad HL = -7,$ slopas.

Svar: $x = 5$.

Efter kvadreringen får man här samma ekvation som i 1a.

Övning 1c, lösning .

$$(*) \qquad \sqrt{13-x} = x-1$$

$$(1) \qquad 13 - x = x^2 - 2x + 1$$

$$(2) \qquad x^2 - x - 12 = 0$$

$$(3) \qquad x = 1/2 \pm \sqrt{1/4 + 12}$$

$$(3) \qquad x_1 = 4, \quad x_2 = -3$$

1/4 + 12 = (1+48)/4 = 49/4 = $(7/2)^2$

Prövning:

$x_1 = 4$ i (*): $VL = \sqrt{9} = 3, \quad HL = 3,$
stämmer.

$x_2 = -3$ i (*): $VL = \sqrt{16} = 4, \quad HL = -4,$
slopas.

Svar: $x = 4.$

Samma typ av lösning som tidigare.

Översikt 4

Ekvationer med prövning.

Vissa ekvationer fordrar en sådan behandling vid lösandet att det kan slinka falska rötter.
Ekvationslösning består ju oftast av en följd av ekvationer där de senare utgör omformningar av de tidigare.
En falsk rot är en lösning till de senare versionerna av ekvationen som dock inte är en lösning till den ursprungliga ekvationen.

En falsk rot måste naturligtvis förkastas.
Medlet mot falska rötter är **prövning i ursprungsekvationen**.
Det är dessutom bra om man lär sig förstå när prövning behövs. All ekvationslösning fordrar nämligen inte prövning.

De vanligaste fallen då prövning behövs uppträder i samband med **kvadratrötter** och **logaritmer**.

Då ekvationer innehåller **kvadratrötter** måste man oftast kvadrera bägge leden av ekvationen för att bli av med dem.
Ibland måste man kvadrera flera gånger för att bli av med alla kvadratrötter.

Det finns två anledningar till att man måste pröva rötterna efter att man har kvadrerat bägge led.

1. Dels kan nya rötter ha tillkommit eftersom **existensområdet** för ekvationens funktioner utökades när kvadratrötterna eliminerades.

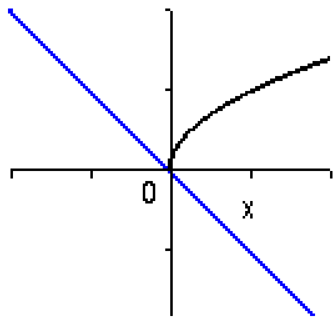
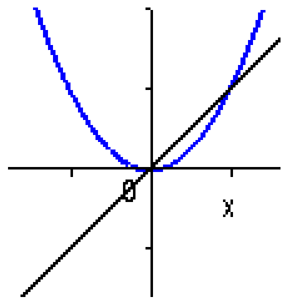
2. Dels kan nya rötter ha tillkommit genom själva **kvadreringseffekten**: 3 är ju inte = -3, men efter kvadrering blir talen lika: $3^2 = (-3)^2 = 9$.

Exempel 2 ger två enkla. typiska exempel på dessa effekter.

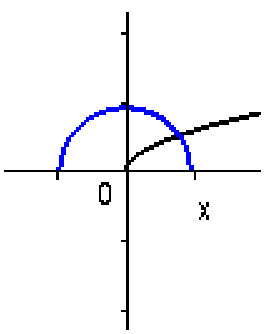
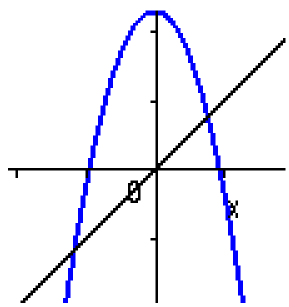
I samband med **logaritmer** uppstår ofta fall 1 ovan, utökning av **existensområdet**, när man går från en ekvation av typen ln A = ln B till A = B.

Grafer

(Översikt 4 forts.)

<table>
<tr>
<td>
y = -x , y = sqrt(x)</td>
<td>
$y = x^2$, y = x</td>
<td>De två graferna avses visa kvadreringseffekten vid ekvationslösning.

Till vänster ses de båda leden i ekvationen
-x = sqrt(x) (sqrt(x) = 'roten ur x') framställda med varsin graf. Skärningspunktens x-koordinat (här x=0) är ekvationens lösning.

Till höger syns den kvadrerade ekvationen framställd på samma sätt. Man ser att den nya roten x=1 har tillkommit p.g.a kvadreringen
Före kvadreringen hade man -1 i vänsterledet och +1 i högerledet.</td>
</tr>
<tr>
<td>
$y=sqrt(6-x^2)$, y = sqrt(x).</td>
<td>
$y = 6-x^2$, y = x.</td>
<td>Dessa grafer visar effekten av utökat existensområde efter kvadrering.

Ekvationen är $sqrt(6-x^2)$ = sqrt(x). där vänsterledets funktion existerar i och mellan punkterna -sqrt(6) och +sqrt(6), medan högerledets rot existerar då x>=0.
Det finns en skärningspunkt, dvs rot, för x=2.
Efter kvadreringen försvinner alla restriktioner för existensområdena och man ser att en ny falsk har tillkommit genom den nya skärningspunkten i x = -3.</td>
</tr>
</table>

Övning 2. Lösningar.

Övning 2a, lösning .

$$(*) \qquad \sqrt{\frac{x^2+x+1}{3x}} = -1$$

Man ser direkt att det inte finns någon lösning eftersom en kvadratrot alltid är ≥ 0.
Om man inte ser det, får man följande räkningar:

$$(1) \qquad \frac{x^2+x+1}{3x} = 1$$

$$(2) \qquad x^2+x+1 = 3x$$

$$(3) \qquad x^2-2x+1 = 0$$

$$(4) \qquad (x-1)^2 = 0$$

$$(5) \qquad x = 1, \text{ (dubbelrot).}$$

Prövning:
$x = 1$ i (*): $VL = \sqrt{1} = 1, \quad HL = -1,$
slopas

Svar: ingen lösning.

Vissa ekvationer behöver man inte lösa på vanligt sätt.

Man kan se direkt att det saknas lösningar.

En anna sådan ekvation finns i Exempel 2.

Övning 2b, lösning .

$$
\begin{array}{ll}
(*) & \ln(2x-7) = \ln(x-4) \\
(1) & 2x - 7 = x - 4 \\
(2) & x = 3
\end{array}
$$

Prövning:

$x = 3$ i (*): $VL = \ln(-1), HL = \ln(-1)$, ej def.
Slopas

Svar: ingen lösning.

Här skall man komma ihåg existensområdet för logaritmer:

ln A är definierad endast om A > 0.

Övning 2c, lösning .

$$
\begin{array}{ll}
(*) & \ln(x^2 + x) = \ln(4x) \\
(1) & x^2 + x = 4x \\
(2) & x^2 - 3x = 0 \\
(3) & x(x-3) = 0 \\
(4) & x_1 = 0, x_2 = 3
\end{array}
$$

Prövning:

$x_1 = 0$ i (*): $VL = \ln 0, HL = \ln 0$, ej def.
Slopas
$x_2 = 3$ i (*): $VL = \ln 12, HL = \ln 12$, stämmer.

Svar: $x = 3$.

Här uppträder roten x=0.

Det är lätt gjort att man glömmer just x=0 eftersom man så lätt förkortar bort x i ekvationen.

Men kom ihåg att så fort man förkortar bort en faktor (x-a) i bägge led i en ekvation skall man notera att x=a är en rot till ekvationen.
Här till vänster löses ekvationen med hjälp av faktorisering för att man inte skall frestas att tappa en rot.

Prövningen visar att just i det här fallet måste man slopa x=0.
Men det var en tillfällighet som beror på att ln 0 inte är definierat.