

Institutionen för matematik.
KTH

Provtentamen i Matematik 2, 5B1116, för B,E,I,IT,M,Media
och T, ht 2001

Skrivtid: xx - yy.

Inga hjälpmedel tillåtna.

För godkänt = betyg 3 fordras minst 16 poäng, för betyg 4 minst 22 poäng och för betyg 5 minst 30 poäng inklusive bonuspoäng. Det maximala antalet poäng på varje uppgift är angivet inom parentes i anslutning till uppgiften. Ange dina bonuspoäng på omslaget.

Samtliga behandlade uppgifter skall förses med utförliga lösningar och motiveringar.

1. Bestäm arean av den del av planet $2x + y + 3z = 12$, (3p)
som ligger i första oktanten, dvs. uppfyller $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.
2. Funktionerna f och g definieras av (3p)
 $f(x, y, z) = F(xy + z)$ resp. $g(x, y, x) = F(x^2 - y^2)$, där F är en deriverbar funktion.
Visa att grad f och grad g är vinkelräta i alla punkter där de är $\neq (0, 0, 0)$.
3. Humlan A flyger längs linjen $\bar{\mathbf{r}} = (1, 2, 1) + t(1, 2, 2)$ (3p)
medan humlan B flyger längs $\bar{\mathbf{r}} = (3, 0, 1) + t(2, -1, 1)$. ($t =$ tiden).
Temperaturen i rummet ges av funktionen
 $T(x, y, z) = \frac{1}{20}(2 + x^2 + xy + 3z^2)$.
Vilken av humlorna upplever störst temperaturökning vid tiden $t = 0$?

VGW

4. Bestäm parametern b så att systemet (3p)

$$\begin{aligned}2x - 3y + z &= 3 \\ x - y &= b \\ x - 2y + z &= 4\end{aligned}$$

får oändligt många lösningar samt bestäm dessa.

5. Bestäm den punkt (x_o, y_o) omkring vilken transformationen (3p)
 $u = xy - y, v = x^2 - y^2 - 2x + 1$ inte har en differentierbar invers.
Bestäm dessutom Jacobimatrisen för transformationens invers i
 $(u, v) = (-2, 3)$ (svarande mot $(x, y) = (-1, 1)$).

6. Funktionen $u(x, y) = (\cos x - y^2)(1 + xy)$ (4p)
har en stationär punkt i origo. MacLaurinutveckla funktionen till och
med andragradstermerna och avgör denna stationära punkts karaktär.

7. Ett koordinatsystem har basvektorerna $\bar{\mathbf{e}}_1$ och $\bar{\mathbf{e}}_2$. (4p)
Ett nytt koordinatsystem införes genom de nya basvektorerna
 $\bar{\mathbf{f}}_1 = 2\bar{\mathbf{e}}_1 - \bar{\mathbf{e}}_2$ och $\bar{\mathbf{f}}_2 = \bar{\mathbf{e}}_1 + \bar{\mathbf{e}}_2$.
Vad blir ekvationen i det nya systemet för den kurva som i det gamla
systemet har ekvationen $y = 2x^2 + 1$?

8. Bestäm den matris X som uppfyller $AXB^{-1} = C$, där (4p)

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ och } C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

9. Låt S vara matrisen $\begin{pmatrix} \sqrt{6} & 1 \\ 0 & \sqrt{6} \end{pmatrix}$. Bestäm $\text{Max}|S\bar{\mathbf{v}}|^2$, då $|\bar{\mathbf{v}}| = 2$. (4p)

10. Linjärkombinationerna $s(1, 0, -1, 2) + t(1, -1, 0, 1)$ (s, t skalärer) (4p)
bildar ett tvådimensionellt underrum H till \mathbf{R}^4 .
Bestäm den punkt på H som ligger närmast punkten $(3, 2, 5, 0)$.